Übung 53
Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind. Falls ja, finden Sie deren Dimension und eine Basis.
(a) $V = \{(x+y-z, 2y-4z, x+3y-5z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$; (3 pt)
(b) $V = \{(x+y-z+1, 2y-4z, x+3y-5z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$; (2 pt)
(c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2y, \ z = 0\}$. (3 pt)

Übung 54
Sei $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ der Vektorraum (mit Dimension 4) der $2 \times 2-$Matrizen mit reellen Koeffizienten. Seien

$$\mathcal{S}(M_2(\mathbb{R})) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \ b = c\}$$

die Menge der symmetrischen Matrizen und

$$\mathcal{A}(M_2(\mathbb{R})) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \ a = d = 0, b = -c\}$$

jene der antisymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, daß
(a) $\mathcal{S}(M_2(\mathbb{R}))$ ein Unterraum von $M_2(\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie dessen Dimension und eine Basis; (3 pt)
(b) $\mathcal{A}(M_2(\mathbb{R}))$ ein Unterraum von $M_2(\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie dessen Dimension und eine Basis. (3 pt)
(c) Welche Matrizen sind in $\mathcal{S}(M_2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{A}(M_2(\mathbb{R}))$? (2 pt)
(d) Zeigen Sie, daß jede Matrix in $M_2(\mathbb{R})$ die Summe von einer Matrix in $\mathcal{S}(M_2(\mathbb{R}))$ und einer Matrix in $\mathcal{A}(M_2(\mathbb{R}))$ ist. (3 pt)

Bemerkung: Diese Eigenschaften gelten auch für $n \times n-$Matrizen mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$.

Übung 55
Sei V der von den Vektoren

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 0, 2, 1), \mathbf{v}_3 = (0, -1, 0, 1), \mathbf{v}_4 = (1, -1, 0, 3)\}$$

erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$.
(a) Finden Sie eine Basis B von V. (2 pt)
(b) Gehört der Vektor $(3, 2, 4, 3)$ zu V? (2 pt)
(c) Gehört der Vektor $(1, 0, 0, 2)$ zu V? Wenn ja, schreiben Sie dessen Koordinaten bezüglich B. (2 pt)
(d) Was ist $\dim(V)$? (1 pt)

Übung 56

Sei $\mathbb{R}_3[x] = \{p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : \ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad ≤ 3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume von $\mathbb{R}_3[x]$ sind. Falls ja, finden Sie deren Dimension und eine Basis.

(a) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : \ p(0) = 0\}$; (3 pt)

(b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : \ a_1 = a_3, \ a_2 = 0\}$. (3 pt)

Übung 57 (3 pt)

Zeigen Sie, daß $B = \{2, 3+x, 1+2x+3x^2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_3[x]$ ist. Schreiben Sie das Polynom $p(x) = 5 + x^2$ als Linearkombination der Elemente in B. Schreiben Sie die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ und der Basis B.

Übung 58

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) Wenn $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ eine Basis eines Unterraums des Vektorraums V ist, dann ist $B' = \{v_2, \ldots, v_n\}$ eine Basis eines Unterraums von V dessen Dimension $n - 1$ ist; (2 pt)

(b) Sei $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geq 3$ eine Menge von Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Dann sind $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linear abhängig; (2 pt)

(c) Man kann eine Teilmenge $U = \{v_{i_1}, v_{i_2}\} \subseteq V$ des Beispiels (b) finden, die eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. (2 pt)