Übung 65
Seien $\mathbf{v}_1(k) = (1, k, 1)$, $\mathbf{v}_2(k) = (k, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3(k) = (1, 1, 2-k)$ drei Vekoren im $\mathbb{R}^3$.
(a) Besimmen Sie den Wert von k, für welchen $\mathbf{v}_1(k)$ und $\mathbf{v}_2(k)$ orthogonal sind. Können Sie auch ein k finden, für welches $\mathbf{v}_1(k)$ und $\mathbf{v}_2(k)$ parallel sind? (2 pt)
(b) Bestimmen Sie abhängig von $k \in \mathbb{R}$ die Dimension des von den Vektoren $\mathbf{v}_1(k)$,$\mathbf{v}_2(k)$ und $\mathbf{v}_3(k)$ erzeugten Unterraums $V(k)$ des $\mathbb{R}^3$. (3 pt)
(c) Für welche Werte von k ist $\{\mathbf{v}_1(k), \mathbf{v}_2(k), \mathbf{v}_3(k)\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? (2 pt)
(d) Zeigen Sie, daß der Vektor $(1, 1, 1)$ im Unterraum $V(1)$ aber nicht im $V(0)$ liegt. Finden Sie für $k \neq 0, 1$ die eindeutige (warum?) Darstellung des Vektors (1,1,1) als Linearkombination von $\mathbf{v}_1(k)$,$\mathbf{v}_2(k)$ und $\mathbf{v}_3(k)$. (3 pt)

Übung 66 (4 pt)
Finden Sie abhängig von $k \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des folgenden linearen Systems

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \\ x + y + (2-k)z = 1 \end{cases}$$

Bemerkung: Vergleichen Sie mit dem Beispiel 65!

Übung 67
Finden Sie eine Basis für die folgenden Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$:
(a) $\mathcal{U}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$ (2 pt)
(b) $\mathcal{U}_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_2 = x_3 = x_4 = 0 \,\text{und}\, x_1 + x_5 = 0\}$ (2 pt)

Übung 68
Finden Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a) $\begin{cases} x + y + z &= -1 \\ 2x - z &= 0 \\ -x + y + 2z &= -1 \end{cases}$ (2 pt)

(b) $\begin{cases} x + y + z &= -1 \\ 2x - z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 0 \end{cases}$ (2 pt)

(c) $\begin{cases} x + y + z &= -1 \\ 2x - z &= 3 \\ -x + y &= 2 \end{cases}$ (2 pt)

Zeigen Sie, daß
(d) die Menge $M = \{(1, 2, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 2)\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, und der Vektor $(-1, 0, 0)$ nicht im von M erzeugten Untervektorraum V des $\mathbb{R}^3$ liegt. (1 pt)

(e) $(-1, 0, -1) \in V$; (1 pt)

(f) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ eine Basis ist, und bestimmen Sie bezüglich dieser die Koordinaten des Vektors $(-1, 3, 2)$. (1 pt)

Bemerkung: Vergleichen Sie (d), (e) und (f) mit (a), (b) und (c)!