Übung 69

(a) Finden Sie abhängig von $k \in \mathbb{R}$ die Determinante und den Rang der folgenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-k \end{pmatrix}$$

(3 pt)

(b) Bestimmen Sie abhängig von $k \in \mathbb{R}$ die zu A inverse Matrix A^{-1}, wenn dies möglich ist. Berechnen Sie danach das Produkt $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 pt)

Bemerkung: Vergleichen Sie mit den Beispielen 65, 66!

Übung 70

Finden Sie Eigenwerte und Eigenräume (mit deren Vielfachheit) der Matrix A der Übung 69, für

(a) $k = 0$; (3 pt)

(b) $k = 1$. (3 pt)

Übung 71 (4 pt)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $f(x, y) = (3x + 4y, 4x - 3y)$ definierte Abbildung. Bestimmen Sie alle Eigenvektoren von f und eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren. Sind die Vektoren der Basis B zueinander orthogonal?

Übung 72

Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen stimmen. Begründen Sie bitte Ihre Antworten.

(a) Die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist ein Untervektorraum. (2 pt)

(b) Wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A mit Eigenwert λ ist, dann ist $c\mathbf{v}$ ein Eigenvektor der Matrix A mit Eigenwert λ, für alle c. (2 pt)

(c) Sei A eine $n \times n-$Matrix deren Zeilen eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Dann hat das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ nur die Lösung $A^{-1}\mathbf{b}$. (Warum existiert die Matrix A^{-1}?) (2 pt)

(d) Sei $\theta \in [0, 2\pi)$, dann ist die Matrix $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ orthogonal aber sie besitzt keinen reellen Eigenvektor. (3 pt)

Übung 73

Rechnen Sie die Ableitung der folgenden Abbildungen aus!

(a) $\cos^2(\ln(x))$; (1 pt)

(b) $x^3(\log(\sqrt[3]{x}))$; (1 pt)

(c) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}+1}+2}$. (1 pt)

Übung 74

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen stetig und differenzierbar sind.

(a) $f(x) = |e^x - 1|$ (2 pt);

(b) $f(x) = |x-1|^3$ (2 pt).