Mathematik A
Übung

ÜBUNGSLEITERIN: **Kropiunig Julia**

1.Übungsblatt

Mitschrift von: **Kloner Christoph**

1. November 2018

Übung 1
Bestimmen Sie Infimum und Supremum sowie Maximum und Minimum, falls letztere existieren, der folgenden Mengen:

(a) $A = \{\frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2} : \ n \in \mathbb{N}\}$; (2 pt)

(b) $B = \{2x^2 - 2x + 5 \geq 0 : \ x \in \mathbb{R}\}$; (2 pt)

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{5}\}$ und $C' = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{5}\}$; (2 pt)

(d) $D = \{\frac{n^2-1}{n^2+1} : \ n \in \mathbb{N}\}$. (2 pt)

Lösung zu 1.

(a) Sei

$$A = \left\{ \frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

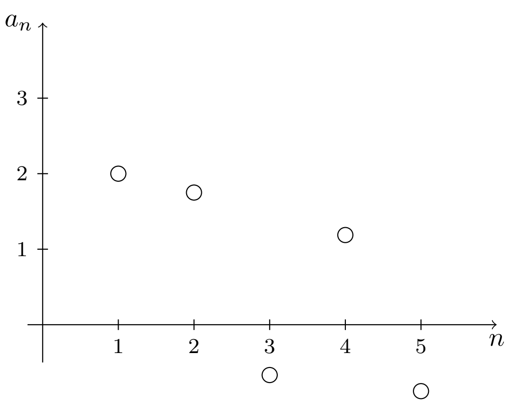
Beobachte zuerst einige Ergebnisse:

$$a_n = \frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2}$$

n	a_n
1	2
2	$1\frac{3}{4}$
3	$-\frac{2}{3}$
4	$1\frac{3}{16}$
5	$-\frac{22}{25}$

Behauptung:

$$\forall n \in U := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists m \in \mathbb{N} : \ n = 2m+1 \right\} \subseteq \mathbb{N} : \quad a_n < a_{n+2} \quad \textit{und} \quad a_n \to 1$$
$$\forall n \in G := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists m \in \mathbb{N} : \ n = 2m \right\} \subseteq \mathbb{N} : \quad a_n > a_{n+2} \quad \textit{und} \quad a_n \to -1$$



Behaupte außerdem:

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2}\right) = 2$$
$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2}\right) = -1$$

Beweis. Betrachte $n \in G$

$$\forall n \in G : n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2) \in G$$
$$\Rightarrow \quad (-1)^{n^2} = 1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2} = \frac{3}{n^2} + 1$$
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in G}} \left(\frac{3}{n^2} + 1\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in G}} \left(\frac{3}{n^2}\right) + \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in G}} (1) = 0 + 1 = 1$$
$$\text{Für } n \in G: \quad a_n \to 1$$
$$\Rightarrow \quad \max_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2}\right) = 2 \quad \text{für } n = 1$$

Betrachte $n \in U$:

$$\forall n \in U: \quad n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = \underbrace{2(2m^2 + 2m)}_{\in G} + 1 \in U$$
$$\Rightarrow \quad (-1)^{n^2} = -1$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2} = \frac{3}{n^2} - 1$$
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in U}} \left(\frac{3}{n^2} - 1\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in U}} \left(\frac{3}{n^2}\right) - \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in U}} (1) = 0 - 1 = -1$$
$$\text{Für } n \in U: \quad a_n \to -1$$
$$\Rightarrow \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{3}{n^2} + (-1)^{n^2}\right) = -1 \quad \text{für } n = \infty$$

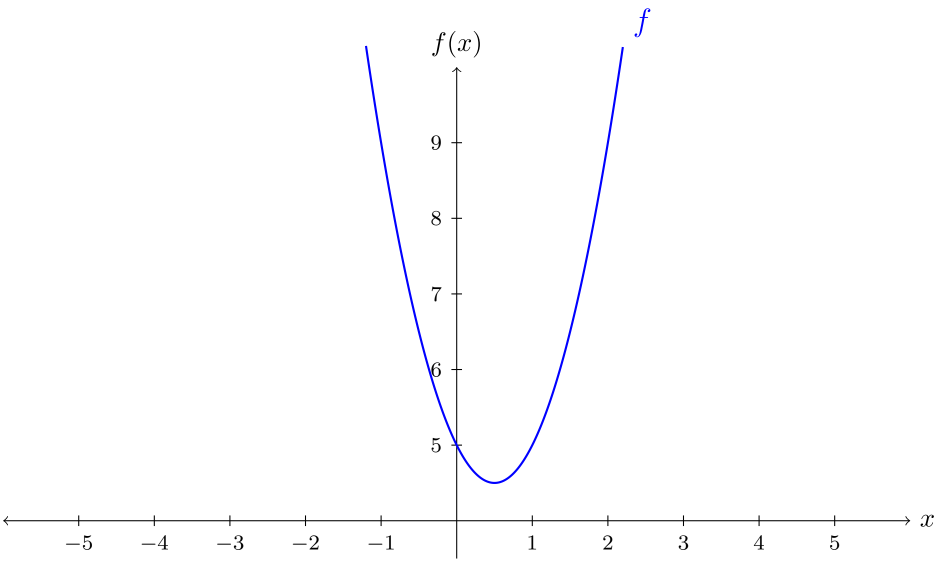
□

(b) Sei

$$B = \left\{2x^2 - 2x + 5 \geq 0 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\}$$

Offensichtlich ist 0 *eine untere Schranke. Betrachte nun*

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 5$$



Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ihr Minimum nimmt die Funktion an der Extremstelle an:

$$f'(x) = 4x - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Behauptung:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(2x^2 - 2x + 5) = \infty$$

Beweis.

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2 - 2x + 5) = 2 \lim_{x\to\infty}\big(x\underbrace{(x-1)}_{\to\infty}\big) + \lim_{x\to\infty}(5) = 2\cdot\infty^2 + 5 = \infty$$

□

$$\Rightarrow \quad \min_{x\in\mathbb{R}}(2x^2 - 2x + 5) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2} + 5 = \frac{1}{2} + 4 = 4\frac{1}{2}$$

(c) Seien

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \leq x \leq \sqrt{5}\right\}$$
$$C' = \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; 0 \leq x \leq \sqrt{5}\right\}$$

Offensichtlich ist 0 *sowohl das Minimum von* C*, als auch das Minimum von* C'*. Weiters ist* $5 > 0$*, somit* $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ *und es gilt:*

$$\max(C) = \sqrt{5}$$

Da $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *gilt, folgt daraus:*

$$\Rightarrow \quad \sup(C') = \sqrt{5}$$

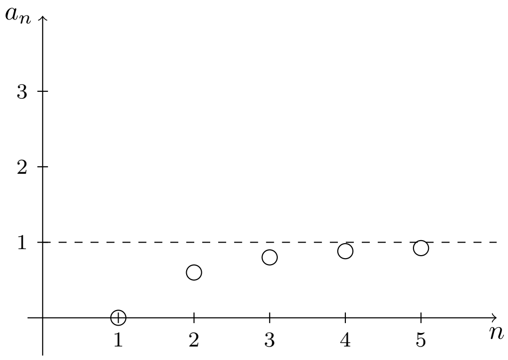
(d) Sei

$$D = \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Beobachte zuerst einige Ergebnisse:

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

n	a_n
1	0
2	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{8}{10}$
4	$\frac{15}{17}$
5	$\frac{24}{26}$



Offensichtlich ist die Funktion $f(n) = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ *monoton steigend mit Schranke 1. Beweisen wir diese Behauptung:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \min(D) = 0 \quad \textit{und} \quad \sup(D) = 1$$

Übung 2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgenden Eigenschaften

(a) (2 pt)

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1, \ \forall n \geq 1, \text{ wobei } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n;$$

(b) (von der Klausur am 21.3.18) (2 pt)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}, \ \forall n \geq 0.$$

(c) Jede Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen. (3 pt)

(d) (von der Klausur am 28.11.18) (3 pt)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(e) (3 pt)

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \ \forall n \geq 0;$$

Ist diese Gleichung immer richtig? Warum?

Lösung zu 2.

(a)
- *Induktionsbasis:* $n = 1$

$$\left.\begin{array}{rcccl} \sum_{i=1}^{1} i \cdot (i!) & = & 1 \cdot 1! & = & 1 \\ (1+1)! - 1 & = & 2 - 1 & = & 1 \end{array}\right\} =$$

- *Induktionsvoraussetzung Für* $n \in \mathbb{N}$ *gelte:*

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1$$

- *Induktionsschritt:* $n \rightsquigarrow n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot (i!) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) + (n+1) \cdot (n+1)! \overset{IV}{=} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! =$$
$$= (n+1)!\big(1 + (n+1)\big) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

(b)

- *Induktionsbasis:* $n = 0$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{0} \tfrac{1}{4k^2-1} &= 0 \\ \tfrac{0}{2\cdot 0+1} &= 0 \end{aligned}\right\} =$$

- *Induktionsvoraussetzung Für* $n \in \mathbb{N}$ *gelte:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$$

- *Induktionsschritt:* $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} \overset{IV}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} =$$

$$= \frac{n \cdot \big(4(n+1)^2 - 1\big) + 1 \cdot (2n+1)}{(2n+1) \cdot \big(4(n+1)^2 - 1\big)} = \frac{4n^3 + 8n^2 + 3n + 2n + 1}{8n^3 + 16n^2 + 6n + 4n^2 + 8n + 3} =$$

$$= \frac{4n^3 + 8n^2 + 5n + 1}{8n^3 + 20n^2 + 14n + 3} = \frac{(n+1)\cancel{(2n+1)^2}}{\cancel{(2n+1)^2}(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

(c)

- *Induktionsbasis:* $n = 0$
  Eine Menge M *mit 0 Elementen ist die leere Menge. Jede Teilmenge der leeren Menge, ist die leere Menge selbst und da diese Eindeutig ist, hat* M *genau* 1 $(= 2^0)$ *Teilmengen.*
- *Induktionsvoraussetzung Für* $n \in \mathbb{N}$ *gelte:*
  Eine Menge mit n *Elementen habe* 2^n *Teilmengen.*
- *Induktionsschritt:* $n \rightsquigarrow n+1$
  Betrachte eine Menge M *mit* $n+1$ *Elementen. Sei* $M' \subset M$ *sodass:* $M' \cup \{m\} = M$, *dann hat* M' *genau* n *Elemente. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt nun, dass* M' *genau* 2^n *Teilmengen besitzt. Nun ist jede Teilmenge* $n \subseteq M'$ *eine Teilmenge von* M *und* $N \cup \{m\}$ *ist ebenfalls eine Teilmenge von* M. *Es gibt also* $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$ *verschiedene Teilmengen der Menge* M.

(d)

- *Induktionsbasis:* $n = 1$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1} k^2 &= 1 \\ \tfrac{1\cdot 2\cdot 3}{6} &= 1 \end{aligned}\right\} =$$

- *Induktionsvoraussetzung Für* $n \in \mathbb{N}$ *gelte:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- *Induktionsschritt:* $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{IV}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} =$$
$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$$

(e)

- *Induktionsbasis:* $n = 0$

$$1 = \frac{1-a}{1-a} \quad \checkmark$$

- *Induktionsvoraussetzung Für* $n \in \mathbb{N}$ *gelte:*

$$1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

- *Induktionsschritt:* $n \rightsquigarrow n+1$

$$\underbrace{1 + a + a^2 + ... + a^n}_{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}} + a^{n+1} \overset{IV}{=} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1} + (1-a)a^{n+1}}{1-a} =$$
$$= \frac{1-a^{n+1}+a^{n+1}-a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

Diese Gleichung gilt offensichtlich für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Übung 3 (von M. Dedo) (3 pt)

Der kleine Daniele, der in der Schule gerade die vollständige Induktion gelernt hat stellt nun folgende Behauptung auf: **Zwei natürliche Zahlen, deren Maximum eine natürliche Zahl ist, sind gleich. D.h.**

$$A(n) = \{a, b \in \mathbb{N} \textbf{ und } \max\{a,b\} = n \in \mathbb{N} \textbf{ dann ist } a = b\}$$

Daniele argumentiert nun so:
Zuerst betrachtet Daniele $A(0)$. Es ist klar, dass $A(0)$ gilt, weil in diesem Fall $a = b = 0$ sein muss (Induktionsanfang).
Angenommen, die Aussage gilt für jedes Paar $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $\max\{a,b\} = n \in \mathbb{N}$ (Induktionsannahme).
Nun zeigt er, dass es für ein Paar $a, b \in \mathbb{N}$, sodass $\max\{a,b\} = n+1 \in \mathbb{N}$, gilt: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $\max\{a,b\} = n+1 \in \mathbb{N}$. Dann ist $\max\{a-1, b-1\} = n \in \mathbb{N}$. Nach Induktionsannahme (angewandt auf $A(n)$) gilt, dass $a-1 = b-1$ und so $a = b$.
Hat Daniele am Wochenende zu wenig geschlafen und etwas falsch gemacht?

Lösung zu 3. *Offensichtlich hat Daniele am Wochenende zu wenig geschlafen, denn für a=0 und b=n stimmt alles, das in seiner Argumentation vorkommt ebenfalls. Offensichtlich ist* $n+1$ *für* $n \geq 0$ *aber sicher größer als 0 und somit gilt:*

$$\max(a,b) = n+1$$

Übung 4 (4 pt)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion den folgenden Binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Lösung zu 4.

- *Induktionsbasis:* $n = 1$

$$\left.\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 & = & a+b \\ (a+b)^1 & = & a+b \end{array}\right\} =$$

- *Induktionsvoraussetzung Für* $n \in \mathbb{N}$ *gelte:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- *Induktionsschritt:* $n \rightsquigarrow n+1$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) &\overset{IV}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \cdot (a+b) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned} \tag{0.2}$$

Es bleibt zu zeigen, dass (1.1) = (1.2) gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{k}b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n+1-k} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{k}b^{n+1-k}$$

Sei nun $j = k-1$*:*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{j+1}b^{n+1-(j+1)} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{j+1}b^{n-j}$$