Mathematik A
Übung

Übungsleiterin: **Kropiunig Julia**

2.Übungsblatt

Mitschrift von: **Kloner Christoph**

5. November 2018

Übung 4
Lösen Sie die folgenden Ungleichungen.
(a) (2 pt)

$$|x-1| - |2x+1| > 0;$$

(b) (3 pt)

$$\frac{|x| + 2x}{x^2 - 1} \leq 1.$$

Lösung zu 4.

(a)

$$|x-1| - |2x+1| > 0$$

- *1. Fall:* $x - 1 \geq 0$ *und* $2x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad und \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

Also der 1. Fall betrachtet die Menge aller $x \geq 1$.

$$|x-1| - |2x+1| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 - 2x - 1 > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \quad \lightning$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \emptyset$$

- *2. Fall:* $x - 1 < 0$ *und* $2x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad x < 1 \quad und \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq x < 1$$

Also betrachtet der 2. Fall die Menge aller $-\frac{1}{2} \leq x < 1$.

$$|x-1| - |2x+1| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-1) - 2x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -x + 1 - 2x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x < 0 \; und \; -\frac{1}{2} \leq x < 1 \right\} = \left[-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

- *3. Fall:* $x - 1 \geq 0$ *und* $2x + 1 < 0$

$$x \geq 1 \quad und \quad x < -\frac{1}{2} \quad \lightning$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_3 = \emptyset$$

- *4. Fall:* $x - 1 < 0$ *und* $2x + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \textit{und} \quad x < -\frac{1}{2}$$

Also betrachtet dieser Fall die Menge aller $x < -\frac{1}{2}$

$$|x-1| - |2x+1| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-1) - \big(-(2x+1)\big) > 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -x+1+2x+1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -2$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_4 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -2 < x < -\frac{1}{2}\right\} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{L} = \bigcup_{i=1}^{4} \mathbb{L}_i = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq x < 0 \textit{ und } -2 < x < -\frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right) = (-2, 0)$$

(b)

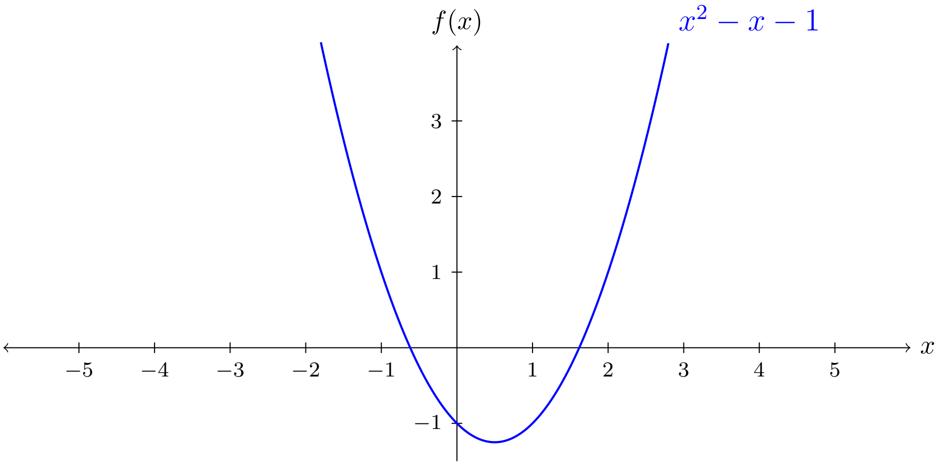
$$\frac{|x| + 2x}{x^2 - 1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x| + 2x}{(x-1)(x+1)} \leq 1$$

- *1. Fall:* $x - 1 < 0$ *und* $x + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \textit{und} \quad x < 1$$

Der 1. Fall betrachtet also die Menge aller $x < -1$

$$\frac{|x| + 2x}{x^2 - 1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 2x \leq x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \geq 0$$
$$x_{1,2} \geq \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad ↯$$



$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \emptyset$$

- *2. Fall:* $x - 1 \geq 0$ *und* $x + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \text{und} \quad x < -1 \quad \lightning$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \emptyset$$

- *3. Fall:* $x - 1 < 0$ *und* $x + 1 \geq 0$

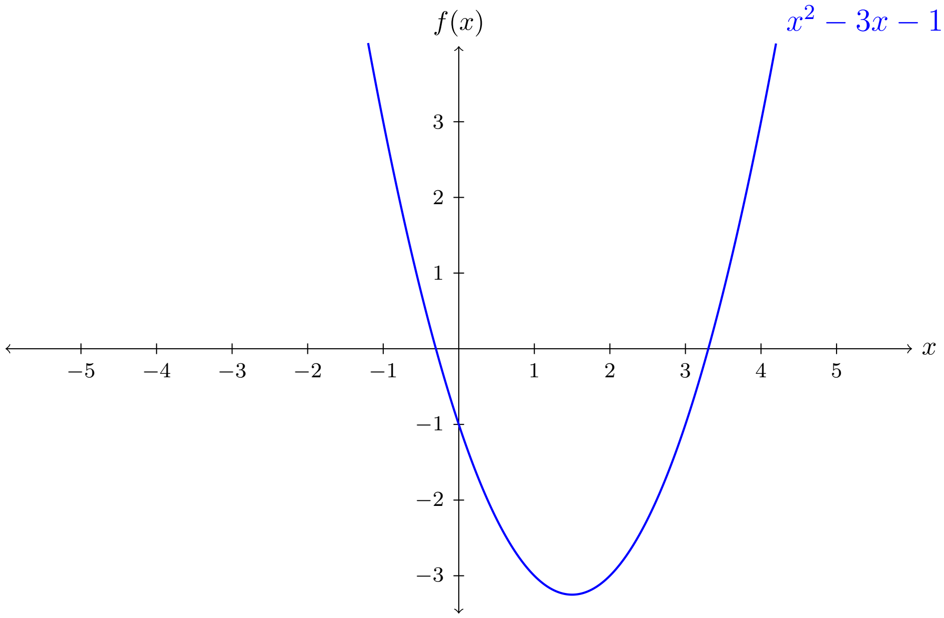
$$\Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \text{und} \quad x \geq -1$$

Dieser Fall betrachtet also die Menge aller $-1 \leq x < 1$

$$|x| + 2x \geq x^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| + 2x - x^2 + 1 \geq 0$$

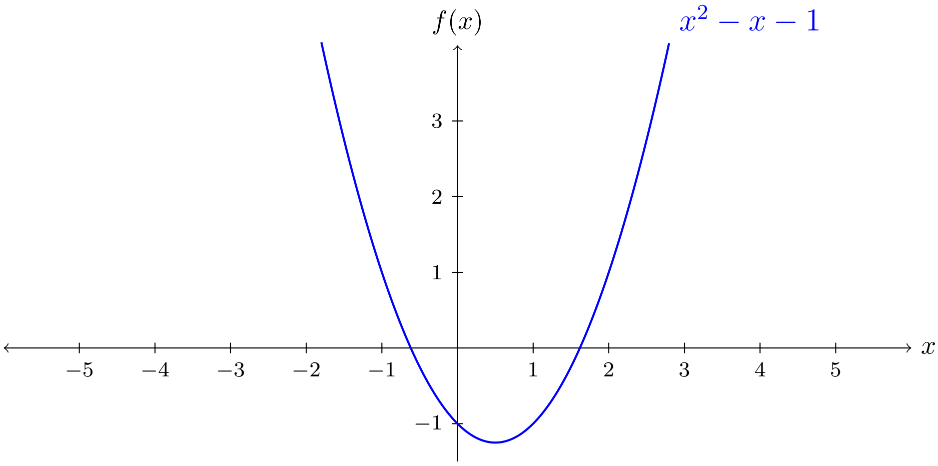
(i) $x \geq 0$:

$$x^2 - 3x - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} \leq \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{3 + \sqrt{15}}{2} \approx 3.43649$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_3' = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \leq x < 1\right\}$$



(ii) $x < 0$:

$$x^2 - x - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} \leq \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -0.618 \leq x < 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_3'' = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -0.618 \leq x < 0\right\}$$



$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_3' \cup \mathbb{L}_3'' = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -0.618 \leq x < 1 \right\}$$

- *4. Fall $x - 1 \geq 0$ und $x + 1 \geq 0$*

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \quad \textit{und} \quad x \geq -1$$

Dieser Fall betrachtet also alle $x \geq 1$

$$x + 2x - x^2 + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1.618 \leq x \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \bigcup_{i=1}^{4} \mathbb{L}_i = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -0.618 \leq x < 1 \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 1.618 \leq x \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -0.618 \leq x < 1 \quad \textit{oder} \quad 1.618 \leq x \right\}$$

Übung 5
Berechnen Sie die Beträge der folgenden komplexen Zahlen und schreiben Sie sie dann in Polarkoordinaten.

(a) (3 pt)

$$z = \frac{(1 + j)^5}{(1 - \sqrt{3}j)^3};$$

(b) (2 pt)

$$z = \frac{1 - j}{1 + j}.$$

Lösung zu 5.

(a)

$$z = \frac{(1+j)^5}{(1-\sqrt{3}j)^3} = \frac{-4-4j}{-8} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = r$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{1}{4}\pi$$
$$\Rightarrow \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

(b)

$$z = \frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j} \cdot \underbrace{\frac{1-j}{1-j}}_{=1} = \frac{1-2j-1}{1-(-1)} = -\frac{2j}{2} = -j$$
$$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{(-1)^2} = 1 = r$$
$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right)$$
$$\Rightarrow \quad z = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

Übung 6

Lösen Sie die folgenden komplexen Gleichungen.

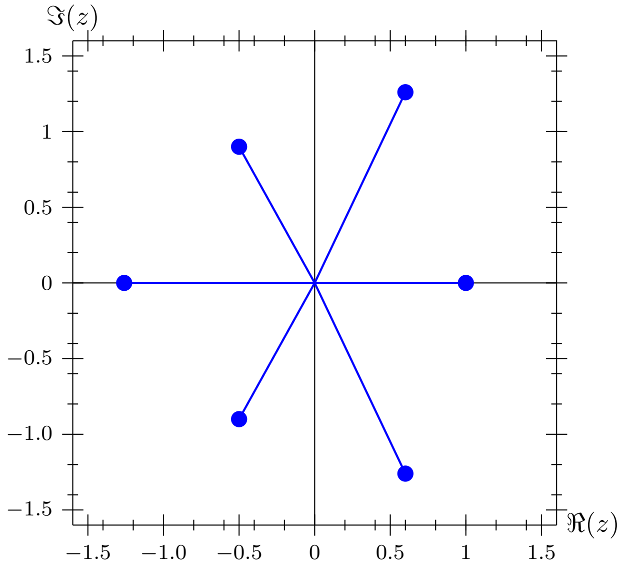
(a) $z^6 + z^3 - 2 = 0$; (3 pt)

(b) $z^2 + 2\overline{z} - |z| = 0$. (3 pt)

Lösung zu 6.

(a)

$$z^6 + z^3 - 2 = 0$$
$$x := z^3$$
$$\Rightarrow \quad z^6 + z^3 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \ \vee \ x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z^3 = 1 \ \vee \ x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z = 1 \ \vee \ z = -\sqrt[3]{-1} \ \vee \ z = (-1)^{\frac{2}{3}}\right) \ \vee \ x + 2 = 0$$
$$x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[3]{-2} \ \vee \ z = -\sqrt[3]{2} \ \vee \ z = -(-1)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2}$$



(b)

$$z = a + ib \in \mathbb{C}$$

$$z^2 + 2\overline{z} - |z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a+ib)^2 + 2(\overline{a+ib}) - |a+ib| = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - b^2 + 2aib + 2a - 2ib - \sqrt{a^2+b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 + 2a - \sqrt{a^2+b^2} + \underbrace{2ib(a-1)}_{\stackrel{!}{=}0} = 0$$

$$\left[\Rightarrow \quad a = 1 \quad \vee \quad b = 0 \right]$$

$$2ib(a-1) = 2iab - 2ib = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2iab = 2ib \quad \Leftrightarrow \quad ab = b$$

$$\textit{Annahme:} \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2\overline{z} - |z| = a^2 + 2a - |a| = 0$$

$$\textit{Für } a < 0: \quad a^2 > 0, \quad 2a < 0, \quad |a| = -a$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 2a + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -3$$

$$\textit{Für} \quad a \geq 0: \quad a^2 \geq 0, \quad 2a \geq 0, \quad |a| = a$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 2a - |a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

$$\textit{Annahme:} \quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2\overline{z} - |z| = (1+ib)^2 + 2(1-ib) - |1+ib| = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 - b^2 + 2ib + 2 - 2ib - \sqrt{1-b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -b^2 - 1 = \sqrt{1-b^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (-b^2-1)^2 = \left|1 - b^2\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1 = -\sqrt{\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}}$$

Übung 7
Berechnen Sie die folgenden Wurzeln und zeichnen Sie sie auf der komplexen Zahlenebene ein.
(a) $\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}j}$; (2 pt)
(b) $\sqrt[4]{\frac{1+j}{1-j}}$. (2 pt)

Lösung zu 7.

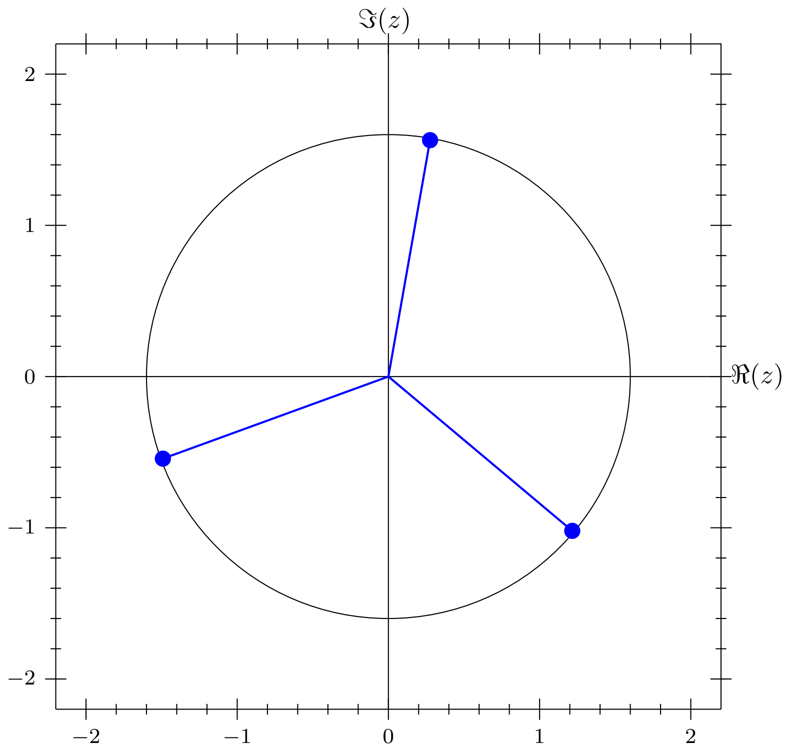
(a)

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+4\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+13} = \sqrt{16} = \pm 4$$

$$W_0 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{n}{3}\right)+2\cdot 0\pi}{3} + j\frac{\sin\left(\frac{n}{3}\right)+2\cdot 0\pi}{3}\right) = 1,492 + 0,543j$$

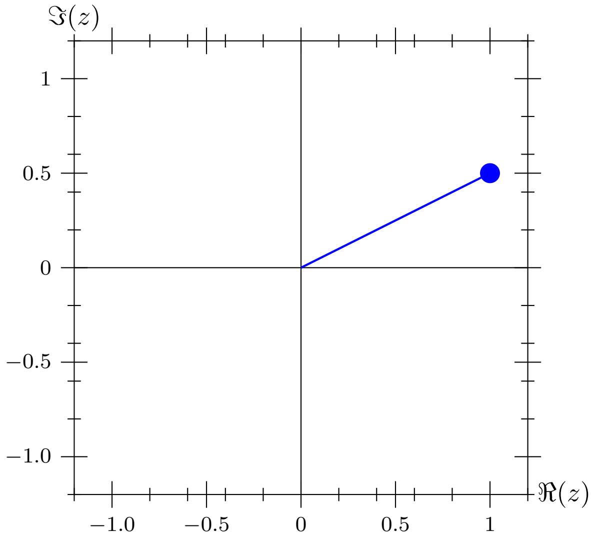
$$W_1 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{n}{3}\right)+2\cdot \pi}{3} + j\frac{\sin\left(\frac{n}{3}\right)+2\cdot \pi}{3}\right) = -1,216 + 1,020j$$

$$W_2 = \sqrt[3]{4}\left(\frac{\cos\left(\frac{n}{3}\right)+4\cdot \pi}{3} + j\frac{\sin\left(\frac{n}{3}\right)+4\cdot \pi}{3}\right) = -0,276 + 1,563j$$



(b)

$$\sqrt[4]{\frac{1+j}{1-j}} = \sqrt[4]{\frac{1+j}{1-j}\cdot\frac{1+j}{1+j}} = \sqrt[4]{\frac{(1+i)^2}{1-i^2}} = \sqrt[4]{\frac{(1+i)^2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{1+2i-i^2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{2i}{2}} = \sqrt[4]{i}$$



Übung 8
Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton wachsend oder fallend sind. Dann betrachten Sie für jede Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Mengen reeller Zahlen $A = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ und finden Sie sup und inf sowie max und min, wenn die letzteren existieren.

(a) $a_n = \dfrac{n^2-2}{2n^2+3}$; (3 pt)

(b) $a_n = \left(-\sqrt[35]{\frac{55}{54}}\right)^{2n+1}$; (3 pt)

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^{2017n}n+n}{2n+3(-1)^n}$. (3 pt)

Lösung zu 8.

(a)

- *Beschränktheit:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{2n^2+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2)+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Behauptung deshalb: a_n ist durch $\frac{1}{2}$ nach oben beschränkt.

Beweis.

$$a_n \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2-2}{2n^2+3} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2-4 \leq 2n^2+3 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq 3$$

Dies ist eine wahre Aussage □

Die untere Grenze folgt aus der Monotonie:

- *Monotonie:*
  Behauptung: a_n ist monoton wachsend.

$$\begin{aligned} a_n \leq a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n^2-2}{2n^2+3} \leq \frac{(n+1)^2-2}{2(n+1)^2+3} = \frac{n^2+2n-1}{2n^2+4n+5} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (n^2-2)\cdot(2n^2+4n+5) \leq (n^2+2n-1)\cdot(2n^2+3) \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \cancel{2n^4}+\cancel{4n^3}+\cancel{n^2}-8n-10 \leq \cancel{2n^4}+\cancel{4n^3}+\cancel{n^2}+6n-3 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 14n+7 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, weshalb a_n monoton wachsend ist.

- *Minimum:*
  Offensichtlich ist das Minimum (=Infimum) der Folge a_n ja genau a_1, da a_n monoton wachsend ist.

$$\min_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(a_n) = \frac{1^2-2}{2\cdot 1^2+3} = -\frac{1}{5}$$

- *Supremum: Für das Supremum ist noch zu zeigen, dass $\frac{1}{2}$ tatsächlich die kleinste obere Schranke ist. Dieser Beweis wird durch Kontradiktion geführt:*

Beweis. Angenommen es existiert eine kleinere obere Schranke von a_n als $\frac{1}{2}$, also:

$$\begin{aligned} &\exists s < \frac{1}{2}: \quad a_n \leq s \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow \quad &\exists \varepsilon > 0: \quad s = \frac{1}{2} + \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad &a_n \leq \frac{1}{2} + \varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad &\underbrace{a_n - \frac{1}{2}}_{\leq 0} \leq \underbrace{\varepsilon}_{>0} \qquad ↯ \end{aligned}$$

□

- *Maximum:*
  Die Folge a_n besitzt kein Maximum.

(b)

- *Beschränktheit:*

$$-\sqrt[35]{\frac{55}{54}} \approx 1,00052439 > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

a_n ist also nach unten unbeschränkt und nach der Monotonie nach oben beschränkt durch a_1.

$$a_1 = \left(-\sqrt[35]{\frac{55}{54}}\right)^3 \approx 1,00157402$$

- *Monotonie:*
Behauptung: a_n ist monoton fallend.

Beweis.

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\sqrt[35]{\frac{55}{54}}\right)^{2n+1} \geq \left(-\sqrt[35]{\frac{55}{54}}\right)^{2n+3} = \left(-\sqrt[35]{\frac{55}{54}}\right)^{2n+1} \cdot \left(-\sqrt[35]{\frac{55}{54}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \left(\underbrace{\sqrt[35]{\frac{55}{54}}}_{\geq 1}\right)^2$$

Dies ist offenbar eine wahre Aussage. □

- *Maximum:*
Das Maximum (=Supremum) ist offensichtlich a_1
- *Minimum:*
Das Minimum existiert nicht.
- *Infimum:*
Das Infimum ist $-\infty$

(c)

(i) *Betrachte zuerst $n \in U := \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N} : \quad n = 2k+1\right\}$*

$$a_n = \frac{(-1)^{2017n}n + n}{2n + 3(-1)^n} = \frac{n-n}{2n-3} = \frac{0}{2n-3} = 0$$

Offensichtlich ist die Folge a_n also gleich 0 für jedes ungerade n.

(ii) *Betrachte nun $n \in G := \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N} : \quad n = 2k\right\}$*

$$a_n = \frac{(-1)^{2017n}n + n}{2n + 3(-1)^n} = \frac{n+n}{2n+3} = \frac{2n}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{2n}}\right) = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n}\right)} = 1$$

- *Beschränktheit:*
  Da a_n monoton steigend ist, ergibt sich als obere Schranke 1.
  Die untere Schranke ist für $n \in G$:

$$a_{\min(G)} = a_2 = \frac{4}{7} = 0,\overline{571428} > 0$$

  Deshalb ist 0 die untere Schranke für $n \in \mathbb{N}$.
- *Monotonie:*
  Behauptung: a_n ist monoton steigend

  Beweis.

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2n}{2n+3} \leq \frac{2n+2}{2n+5} \quad \Leftrightarrow \quad 2n(2n+5) \leq (2n+2)(2n+3) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \cancel{4n^2} + \cancel{10n} \leq \cancel{4n^2} + \cancel{10n} + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 6$$

  Dies ist eine wahre Aussage. □

- *Minimum/Infimum:*
  Das Minimum (=Infimum) ist 0.
- *Maximum/Supremum:*
  Das Maximum (=Supremum) ist 1.