Mathematik A
Übung

Vortragende: **Kropiunig Julia**

3.Übungsblatt

Mitschrift von: **Kloner Christoph**

5. November 2018

Übung 9

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n\geq\mathbb{N}}$ konvergent sind und finden Sie den Limes, wenn er existiert.

(a) $a_n = \frac{-n^2-3}{3n^3+1} + j \cdot \frac{2n-n^4}{\pi n^4+1}$; (2 pt)

(b) $a_n = \frac{4^n-3^n}{n+(-1)^n+2^{3n}}$; (2 pt)

(c) $a_n = \sqrt[n]{e^n - 2^n + 1}$; (2 pt)

(d) $a_n = (\frac{-\sqrt{23}}{5})^n$; (2 pt)

(e) $a_n = (\frac{n-3}{n})^n$; (2 pt)

(f) $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$; (3 pt)

(g) $a_n = (1 + \frac{3}{n^3})^{2n^3}$; (3 pt)

(h) $a_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$; (3 pt)

(i) $a_n = \frac{5^n}{n!+2^n}$; (2 pt)

(l) $a_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$. (2 pt)

Lösung zu 9.

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2-3}{3n^3+1} + j\frac{2n-n^4}{\pi n^4+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2-3}{3n^3+1}\right) + j\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-n^4}{\pi n^4+1}\right) =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)} + j\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}\right) - \lim\limits_{n\to\infty}(1)}{\pi + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)} = \frac{0-0}{3+0} + j\cdot\frac{0-1}{\pi+0} = -\frac{j}{\pi}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n-3^n}{n+(-1)^n+2^{3n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{4}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{8}\right)^n}{\frac{n}{2^n} + \frac{(-1)^n}{8^n} + 1}\right) = \frac{0-0}{0+0+1} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{e^n-2^n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{e^n\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n + \frac{1}{e^n}\right)}\right) = 0$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{-\sqrt{23}}{5}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(- = 0\underbrace{\sqrt{\frac{23}{25}}}_{<1}\right)\right) = 0$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n-3}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right) = e^{-3}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{2}$$

(g)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n^3}\right)^{2n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^{n^3}\right)^2\right) = (e^3)^2 = e^6$$

(h)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n^2\frac{1}{2^n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}}\right) =$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right) = 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = 0$$

(i)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n!+2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n!\left(1+\frac{2n}{n!}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{n!}\right) = 0 \qquad (0.1)$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{n^4}{n^4}+\frac{1}{n^4}}-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1}-1}{n^2}\right) = 0$$

Übung 10 (3 pt)

Sei

$$a_n = \pi(-1)^n - \frac{(-1)^{n^2} + n}{n^2}.$$

(a) Ist $\{a_n\}$ beschränkt? Entscheiden Sie, ob $\{a_n\}$ monoton ist. Ist $\{a_n\}$ konvergent?

(b) Können Sie ohne Rechnung sagen, ob die Folge $\{a_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ enthält? Warum? Welche Häufungswerte hat $\{a_n\}$?

Lösung zu 10.

(a)

$$a_{2n} = \pi(-1)^{2n} - \frac{(-1)^{(2n)^2} + 2n}{(2n)^2} = \pi - \frac{1+2n}{4n^2} \to \pi$$

$$a_{2n+1} = \pi(-1)^{2n+1} - \frac{(-1)^{2n+1} + 2n + 1}{(2n+1)^2} = -\pi - \frac{\cancel{(-1)} + 2n + \cancel{1}}{(2n+1)^2} = -\pi - \frac{2n}{(2n+1)^2} \to -\pi$$

a_{2n} und a_{2n+1} sind also offensichtlich beschränkt, aber nicht monoton.

(b) a_{2n} und a_{2n+1} sind Teilfolgen von a_n mit der gewünschten Eigenschaft.

Übung 11 (4 pt)

Sei $a_n = \frac{n^3-3n}{2n^3}$. Benutzen Sie die Definition des Limes, um zu zeigen, dass $\lim a_n = 1/2$. Finden Sie das kleinste N_ε, sodass $|a_n - 1/2| = 3/2n^2 < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$, wobei $\varepsilon = 1/10, 1/100, 1/1000$.

Lösung zu 11.

Übung 12 (2 pt)

Nach der letzten Vorlesung, in der Daniele gesagt hat, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ nicht konvergiert, hat er geglaubt, dass er einen Fehler gemacht hat...

Nämlich argumentiert er nun: ich möchte zeigen, dass $\lim a_n = 0$. Mit Hilfe der Definition, muss ich zeigen, dass die Ungleichung $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Ich nehme $\varepsilon = 2$. Dann habe ich $|a_n - 0| = |(-1)^n - 0| = 1 < 2 = \varepsilon$ für alle $n \geq 1$. Das bedeutet, dass für $\varepsilon = 2$ die Ungleichung für alle $n \geq N_\varepsilon = 1$ erfüllt ist und so $\lim(-1)^n = 0$.

Ist der Gedankengang von Daniele richtig oder hat er falsch argumentiert?

Lösung zu 12. *Laut Definition muss gelten, dass diese Aussage für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Nimmt man* *als $\varepsilon = 0,1$ so folgt:*

$$|a_n - 0| = |(-1)^n| = 1 < 0,1 = \varepsilon$$

eine falsche Aussage.

Übung 13 (2 pt)

In der Übung 12 hat der Daniele gesagt, dass die Folge $a_n = (-1)^n$ gegen 0 konvergiert. Er hat geglaubt, dass er einen Fehler gemacht hat...
Nämlich argumentiert er nun: ich möchte zeigen, dass $\lim a_n = 1$. Mit Hilfe der Definition, muss ich zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - 1| < \varepsilon$ für unendlich viele $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Dann habe ich $|a_n - 1| = |(-1)^n - 1| = 0 < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und für alle $n \geq 1$ gerade. Das bedeutet, dass die Ungleichung $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle n gerade mit $n \geq N_\varepsilon = 1$ erfüllt ist und so $\lim(-1)^n = 1$.
Ist der Gedankengang von Daniele richtig oder hat er falsch argumentiert?

Lösung zu 13. *Laut Definition muss gelten, dass diese Aussage für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Nimmt man als $\varepsilon = 0,1$ so folgt:*

$$|a_n - 1| = |(-1)^n - 1| = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \textit{für} & n \in G := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : \quad n = 2k\} \\ 2 & \textit{für} & n \in U := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : \quad n = 2k+1\} \end{array} \right\} < 0,1 = \varepsilon$$

eine falsche Aussage.

Übung 14 (2 pt)

Sei $|a| < 1$ und sei $s_n = 1 + a + a^2 + \cdot + a^n$. Bestimmen Sie $s = \lim s_n$.
Hinweis: Verwenden Sie Übung 2e.

Lösung zu 14.

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right) = \frac{1}{1-a}$$