Mathematik A
Übung

Vortragende: **Kropiunig Julia**

4.Übungsblatt

Mitschrift von: **Kloner Christoph**

5. November 2018

Übung 15 (3 pt)

Zeigen Sie:

$$a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0.$$

Lösung zu 15.

$$\begin{aligned}
a_n \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n - 0| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n| - 0 < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \to 0
\end{aligned}$$

Übung 16

Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergent/absolut konvergent sind.

(a) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n^2 - 1}$; (2 pt)

(b) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^n}{3^n + n - 1}$; (2 pt)

(c) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{2^n}{n!}$; (2 pt)

(d) $\sum_{n\geq 1} (\frac{n-3}{n})^n$; (3 pt)
Hinweis : Betrachten Sie das Beispiel 9 e.

(e) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{n+1}{n^2}$; (3 pt)

(f) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n! + n^2}{3^n + 4}$; (2 pt)

(g) $\sum_{n\geq 2} \dfrac{\cos(\pi n) n^2}{n^3 - n}$; (3 pt)

(h) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(3\pi^2 n) n}{2^n + n^2}$. (3 pt)

Lösung zu 16.

(a)

$$n^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^2 - 1 \geq n^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n^2-1} \leq \frac{1}{n^2}$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n^2-1} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$\frac{1}{n^2}$ *ist also eine absolut konvergente Majorante.*

(b)

$$3^n + n - 1 \geq 3^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^n}{3^n + n - 1} \leq \frac{e^n}{3^n}$$

$\frac{e^n}{3^n}$ ist offensichtlich eine Majorante. Wende nun das Wurzelkriterium auf diese Majorante an um zu zeigen, dass sie absolut konvergiert und damit zu folgern, dass auch die gegebenen Reihe absolut konvergiert.

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\left| \frac{e^n}{3^n} \right|} \right) = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\left(\frac{e}{3} \right)^n} \right) = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{e}{3} \right) = \frac{e}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^n}{3^n + n - 1} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^n}{3^n} < \infty$$

Es hat sich herausgestellt, dass die gefundene Majorante eine absolut konvergente Majorante ist und somit absolute Konvergenz für die gegebene Reihe folgert.

(c) *Wende das Quotientenkriterium an:*

$$\left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \left| \frac{2^{\cancel{n+1}} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{2^n} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}} \right| = \left| \frac{2}{n+1} \right| < 1$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für $N = 2$ und $n \geq N$.
Somit konvergiert diese Reihe absolut nach dem Quotientenkriterium.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n-3}{n} \right)^n \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{3}{n} \right)^n \right) = e^{-3} \neq 0$$

Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen ist, dass die Folge eine Nullfolge ist. Dies ist hier offensichtlich nicht erfüllt, weshalb die Reihe divergiert.

(e)

$$\left| (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2} \right| = \left| \frac{n+1}{n^2} \right| = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$\frac{1}{n^2}$ konvergiert, aber $\frac{1}{n}$ divergiert, weshalb auch diese Reihe divergiert.

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n! + n^2}{3^n + 4} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n! \left(1 + \frac{n^2}{n!} \right)}{3^n \left(1 + \frac{4}{3^n} \right)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{3^n} \right) \nrightarrow 0$$

Ähnlich wie in Punkt (d) ist hier ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz nicht erfüllt.

(g) *Da* $\cos(\pi n) = -1$ *für* $n \in U := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : \quad n = 2k+1\} \subseteq \mathbb{N}$ *und* $\cos(\pi n) = 1$ *für* $n \in G := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : \quad n = 2k\} \subseteq \mathbb{N}$ *entspricht* $\cos(\pi n) = (-1)^n$. *Wende nun das Leibnizkriterium auf die Reihe an:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^3-n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Deshalb konvergiert diese Reihe nach dem Leibnizkriterium.

(h)

$$\left|\frac{\cos(3\pi^2 n)n}{2^n+n^2}\right| = \left|\cos(3\pi^2 n)\right| \cdot \frac{n}{2^n+n^2} \leq \frac{n}{2^n+n^2} \leq \frac{n}{2^n}$$

Nun wurde also eine Majorante gefunden. Überprüfe diese Majorante auf absolute Konvergenz mittels des Quotientenkriteriums:

$$\left|\frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n}{2^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)\cdot \cancel{2^n}}{n\cdot 2^{\cancel{n+1}}}\right| = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ *sodass für alle* $n \geq N$ *der Quotient kleiner* 1 *ist, weshalb diese Reihe absolut konvergiert.*

Übung 17 (3 pt)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Reihe konvergent/absolut konvergent?

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

Lösung zu 17. *Betrachte diese Reihe mit dem Quotientenkriterium:*

$$\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \left|\frac{x^{\cancel{n+1}}\cdot n}{\cancel{x^n}\cdot(n+1)}\right| = |x| \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leq 1}$$

$$\Rightarrow \quad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1,1)$$

Da ich über die Ränder keine Aussage machen kann, muss ich sie gesondert betrachten:

- $x = 1$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$$

Diese Reihe divergiert.

- $x = -1$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n}$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibnizkriterium.