Mathematik A
Übung

VORTRAGENDE: **Kropiunig Julia**

5.Übungsblatt

Mitschrift von: **Kloner Christoph**

8. November 2018

Übung 18 (2 pt)

Zeigen Sie, dass $0,\overline{9} = 1$.

Hinweis $0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots = \sum_n \cdots$

Lösung zu 18.

$$0,\overline{9} = 9\left(\frac{1}{10}\right) + 9\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{10}\right)^3 + ... = 9 \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} (10)^{-n} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Übung 19 (von der Klausur am 5.10.2018) (3 pt)

Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergent/absolut konvergent ist:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(3^{2^n} - n^3)\cos(\pi^2 n)}{e^n - n}.$$

Lösung zu 19.

$$\frac{\ln\left(3^{2^n} - n^3\right)\cos(\pi^2 n)}{e^n - n} \leq \frac{\ln\left(3^{2^n}\right)}{e^n - n} = \frac{2^n \ln(3)}{e^n - n}$$

Wende nun, auf diese gefundene Majorante, das Quotientenkriterium an:

$$\left|\frac{\frac{2^{n+1}\ln(3)}{e^{n+1}-n-1}}{\frac{2^n\ln(3)}{e^n-n}}\right| = \left|\frac{\cancel{2^{n+1}}\cancel{\ln(3)}(e^n-n)}{\cancel{2^n}\cancel{\ln(3)}(e^{n+1}-n-1)}\right| = \left|\frac{2e^n - 2n}{e^{n+1}-n-1}\right| < \left|\frac{e^{n+1}-2n}{e^{n+1}-n-n}\right| = \left|\frac{e^{n+1}-2n}{e^{n+1}-2n}\right| = 1$$

Übung 20 (von der Klausur am 02.05.2016) (3 pt)

Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Reihe konvergent/absolut konvergent?

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(2x)^n}{3^{2n}\sqrt[3]{n}}.$$

Lösung zu 20.

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\left|\frac{(2x)^n}{3^{2n}\sqrt[3]{n}}\right|}\right) = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{|2x|^n}}{\sqrt[n]{|3^2|^n}\sqrt[n]{\sqrt[3]{n}}}\right) = \frac{|2x|}{9}\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{2|x|}{9} \overset{!}{<} 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2|x| < 9 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{9}{2}$$

Diese Reihe konvergiert also absolut für $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| < \frac{9}{2}\right\}$

Übung 21 (von der Klausur am 16.5.2018) (3 pt)
Entscheiden Sie, ob die folgende Reihe konvergent/absolut konvergent ist:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{n^2+3n}{\cos(\pi n^2)(n^3-1)}.$$

Lösung zu 21.

$$\textit{Für} \quad n \in G := \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}: \quad n = 2k\right\} \quad \textit{gilt} \quad n^2 \in G$$
$$\textit{Für} \quad n \in U := \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}: \quad n = 2k+1\right\} \quad \textit{gilt} \quad n^2 \in U$$
$$\Rightarrow \quad \cos(\pi n^2) = (-1)^n$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{n\geq 2} \frac{n^2+3n}{\cos(\pi n^2)(n^3-1)} = \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n^2+3n}{n^3-1}$$

Prüfe nun nach, ob ich auf diese Reihe das Leibnizkriterium anwenden darf:
Monoton fallend:

$$a_{n+1} \overset{!}{<} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)^2+3(n+1)}{(n+1)^3-1} < \frac{n^2+3n}{n^3-1} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(n^2+5n+4\right)(n^3-1) < \left(n^2+3n\right)(n^3+2n^2+2n) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \cancel{n^5} + 5n^4 + 4n^3 - n^2 - 5n - 4 < \cancel{n^5} + 7n^4 + 8n^3 + 6n^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -2n^4 - 4n^3 - 7n^2 - 5n - 4 < 0$$

Dies ist eine wahre Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$

- *Nullfolge:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n}{n^3-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}\right) = \frac{0+0}{1-0} = 0$$

Also ist dies eine Nullfolge.

Nachdem sich herausgestellt hat, dass $\frac{n^2-3n}{n^3-1}$ *eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.*

Übung 22 (3 pt)

Sei

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, daß a_n eine Nullfolge ist.
(b) Betrachten Sie die Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$. Ist diese Reihe konvergent?
(c) Kann man hier das Kriterium von Leibniz verwenden?

Lösung zu 22.

(a)

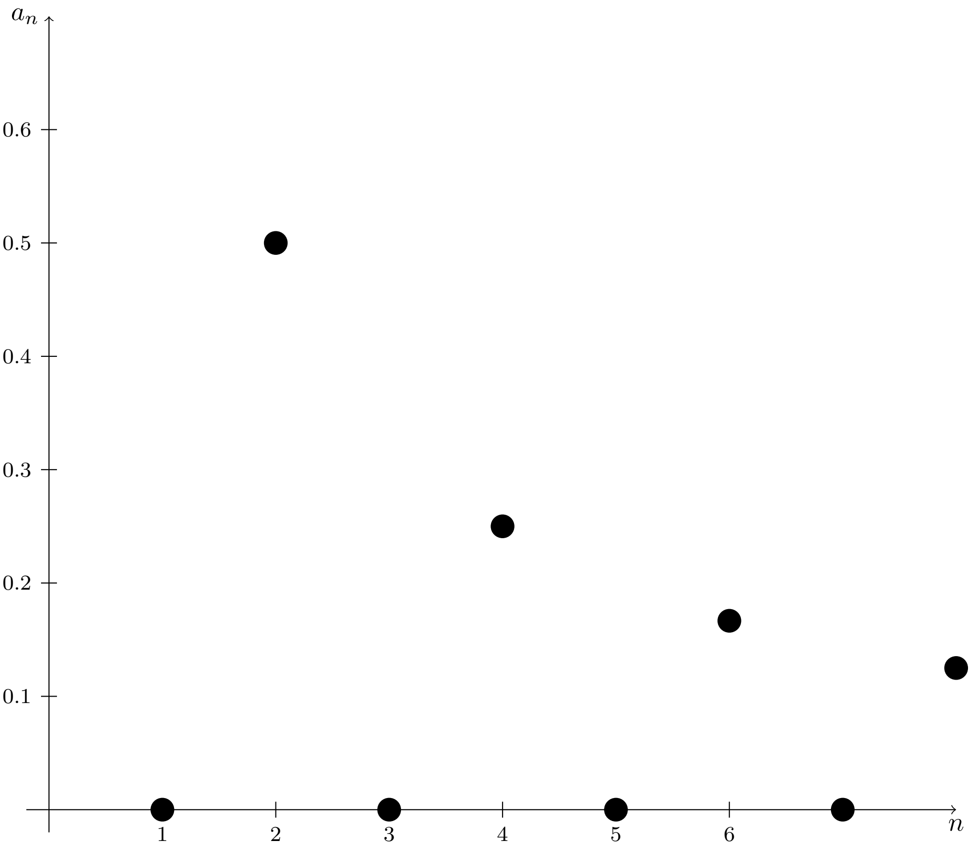
$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n}) = \lim_{n\to\infty}(0) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$

(b)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n = 0 + \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{6} - 0 + \frac{1}{8} - 0... = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty$$

Also divergiert diese Reihe bestimmt.

(c) Das Leibnizkriterium ist offensichtlich nicht anwendbar, da diese Folge nicht monoton fallend ist.



Übung 23 (je 1 pt)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Folgen $\{a_n\}_{n \geq \mathbb{N}}$ konvergent sind und finden Sie den Limes, wenn er existiert.

(a) $a_n = n \sin(1 + 1/2n)$;

(b) $a_n = \frac{\ln(1+n)}{3n}$;

(c) $a_n = (1 + 3n)^{\frac{1}{n}}$.

Lösung zu 23.

(a)

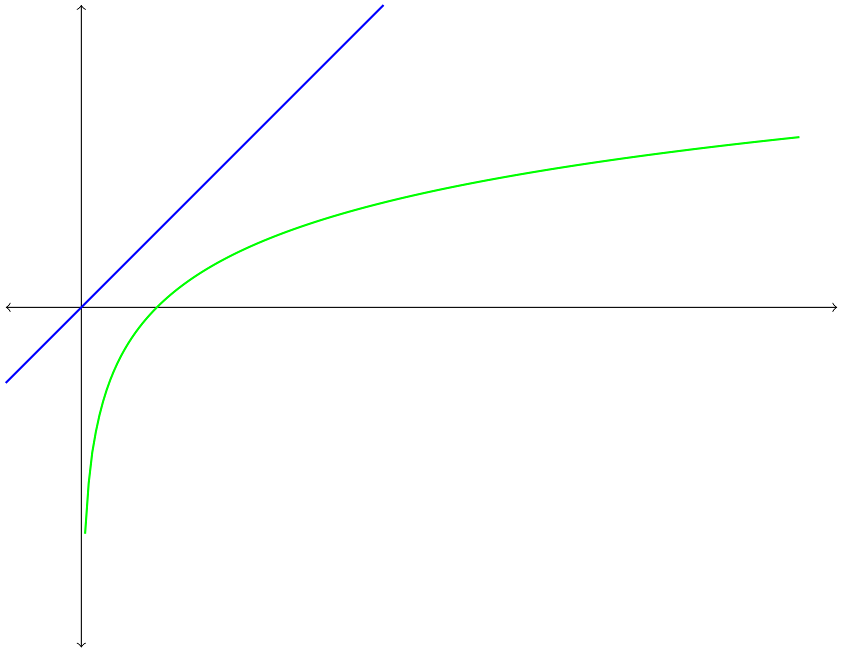
$$\lim_{n\to\infty} \left(n \sin\left(1 + \frac{1}{2} n\right)\right) = \infty \cdot \sin\left(1 + \frac{1}{2}\infty\right)$$

Nun setzt sich das Ergebnis zusammen aus einem Produkt aus ∞ und einer Zahl zwischen -1 und $+1$, weshalb diese Folge divergiert.

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+n)}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\ln(1+n)}{n}}{3}\right)=\frac{0}{3}=0$$

Dies gilt, da der Logarithmus langsamer als linear wächst.



(c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1+3n}\right)=\sqrt[\infty]{1+3\infty}=1$$