Mathematik A
Übung

Vortragende: **Kropiunig Julia**

6.Übungsblatt

Mitschrift von: **Kloner Christoph**

13. November 2018

Übung 24 (2 pt)

Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe: $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2+3n}$.

Lösung zu 24. *Zeige, dass diese Reihe absolut konvergiert und folgere daraus Konvergenz:*

$$\left|\frac{\frac{2}{(n+1)^2+3(n+1)}}{\frac{2}{n^2+3n}}\right| = \left|\frac{2n^2+6n}{2n^2+10n+8}\right| < \left|\frac{2n^2+6n}{2n^2+6n}\right| = 1$$

Dadurch folgt, nach dem Quotientenkriterium, absolute Konvergenz, also auch Konvergenz.

$$\frac{2}{n^2+3n} = \frac{2}{n(n+3)} \overset{!}{=} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 = A(n+3) + B(n) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = (A+B)n + 3A$$

$$\Rightarrow \quad A+B=0 \quad \textit{und} \quad 3A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3} \quad \textit{und} \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{n^2+3n} = \frac{\frac{2}{3}}{n} - \frac{\frac{2}{3}}{n+3} = \frac{2}{3n} - \frac{2}{3n+3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2+3n} = \sum_{n\geq 2}\left(\frac{2}{3n} - \frac{2}{3(n+3)}\right) = \sum_{n\geq 2}\left(\frac{2}{3n} - \frac{2}{3n+9}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{6} - \cancel{\frac{2}{15}}}_{n=2} + \underbrace{\frac{2}{9} - \cancel{\frac{2}{18}}}_{n=3} + \underbrace{\frac{2}{12} - \cancel{\frac{2}{21}}}_{n=4} + \underbrace{\cancel{\frac{2}{15}} - \frac{2}{24}}_{n=5} + \underbrace{\cancel{\frac{2}{18}} - \frac{2}{27}}_{n=6} + \underbrace{\cancel{\frac{2}{21}} - \frac{2}{30}}_{n=7} \mp \ldots$$

Offensichtlich ist dies eine Teleskopsumme, da für den Nenner gilt:

$$\frac{2}{3n} \xrightarrow{n\to n+3} \frac{2}{3(n+3)} = \frac{2}{3n+9}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n\geq 2}\left(\frac{2}{3n} - \frac{2}{3n+9}\right) = \frac{2}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{12} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{6}{18} + \frac{4}{18} + \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$$

Übung 25 (3 pt)

Ist das folgende Argument richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{\frac{2n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(-1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1} = 1$$

Lösung zu 25.

$$\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^{\frac{2n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(-1)^{2n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1}\right) = \pm 1$$

Übung 26 (3 pt)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ n reelle Zahlen mit der Eigenschaft $|x_i| < 1$, für jedes $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, daß es kein Polynom

$$p(x) = x^n + nx^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gibt, dessen Nullstellenmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist.

Lösung zu 26. *Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen es existiert ein Polynom $p(x)$ vom Grad n mit Nullstellenmenge $\{x_1, ..., x_n\}$ und $|x_i| < 1$ für jedes i. Dann hat $p(x)$ die Form:*

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)$$

Nun muss x^{n-1} genau n mal vorkommen, hier ergibt sich x^{n-1} aber wie folgt:

$$-x_1 \cdot x^{n-1} - x_2 \cdot x^{n-1} - ... - x_n \cdot x^{n-1} = \left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) x^{n-1}$$

Laut Angabe ist jeder Summand der Summe betragmäßig kleiner als 1, weshalb:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

gilt. Somit existiert kein Polynom, mit dieser Eigenschaft.

Übung 27 (je. 2 pt)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen bijektiv sind. Wenn ja, finden Sie die Umkehrfunktionen. Andernfalls verändern Sie den Definitionsbereich und den Bildbereich so, daß die Funktion bijektiv wird. Dann bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

(a) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{4}$;

(b) $f(x) = \sqrt{|x| + 1} + 1$.

Lösung zu 27.

(a)

- *Injektivität:*

zu zeigen: für jedes $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ *mit* $x_1 \neq x_2$: $\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

$$x_1 \neq x_2 : \qquad f(x_1) \stackrel{!}{=} f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-2x_1}{4} = \frac{1-2x_2}{4} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 1-2x_1 = 1-2x_2 \quad \Leftrightarrow -2x_1 = -2x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad ⚡$$

Also ist diese Abbildung injektiv.

- *Surjektiv:*
  zu zeigen: für jedes $y \in \mathbb{W}$: $\quad \exists x \in \mathbb{D} : \quad f(x) = y$
  Angenommen $\exists y \in \mathbb{R} : \quad \nexists x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = y$

$$-\frac{4y-1}{2} \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad f(x) \in \mathbb{R}$$

Also ist die Abbildung surjektiv und somit Bijektiv

- *Umkehrabbildung:*

$$y = \frac{1-2x}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4y = 1-2x \quad \Leftrightarrow \quad 4y-1 = -2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-4y}{2} = x$$

(b)

- *Injektivität:*
  zu zeigen: für jedes $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ *mit* $x_1 \neq x_2$: $\quad f(x_1) \neq f(x_2)$

$$x_1 \neq x_2 : \qquad f(x_1) \stackrel{!}{=} f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{|x_1|+1}+1 = \sqrt{|x_2|+1}+1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{|x_1|+1} = \sqrt{|x_2|+1} \quad \Leftrightarrow \quad \big||x_1|+1\big| = \big||x_2|+1\big|$$

Offensichtlich ist diese Gleichheit für $x_1 = -1$ *und* $x_2 = 1$ *erfüllt, obwohl*$-1 \neq 1$. *Weshalb diese Abbildung nicht injektiv ist.*

- *Surjektiv:*
  zu zeigen: für jedes $y \in \mathbb{W}$: $\quad \exists x \in \mathbb{D} : \quad f(x) = y$
  Angenommen $\exists y \in \mathbb{R} : \quad \nexists x \in \mathbb{R} : \quad f(x) = y$

$$y - 1 = \sqrt{|x|+1} \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \big||x|+1\big|$$

Beide Seiten sind ≥ 0, *deshalb existiert für jedes* $y \in \mathbb{R}$ *ein* $x \in \mathbb{R}$, *sodass die Gleichheit erfüllt ist, weshalb die Abbildung surjektiv ist.*

- *Bijektiv machen: Offensichtlich genügt es den Definitionsbereich auf die positiven reellen Zahlen zu beschränken, damit die Gleichheit nicht mehr erfüllt ist für* $x_1 \neq x_2$
- *Umkehrabbildung:*

$$y = \sqrt{|x|+1}+1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \big||x|+1\big| \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = x+1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)^2 - 1 = x$$

Übung 28 (je. 2 pt)

Finden Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-9}\cdot 3^{x/(2x-4)}}{x^2-9x+14}$;

(b) $f(x) = \sqrt[2^{1000}]{x^7-x^3}$;

(c) $f(x) = \sqrt[53]{\dfrac{1}{x^5-x^3}}$.

Lösung zu 28.

(a)

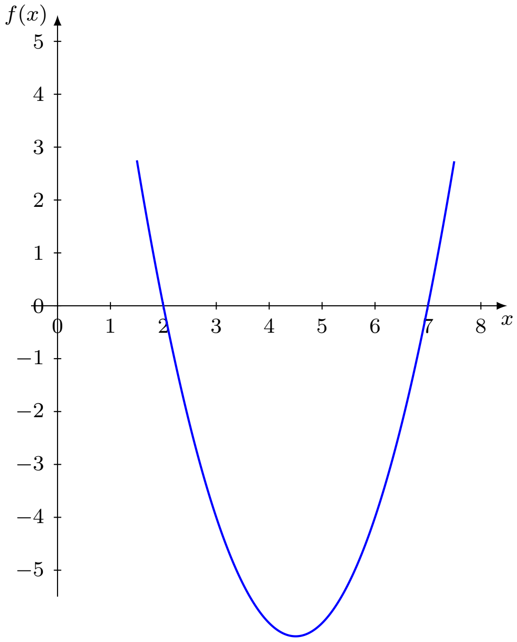
- $x^2 - 9 \overset{!}{\geq} 0$

$$x^2 - 9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 9 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \geq 3$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_1 = \mathbb{R} \setminus (-3, 3)$$

- $2x - 4 \neq 0$

$$2x - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

- $x^2 - 9x + 14 \neq 0$



$$x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-56}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{9+5}{2} = \frac{14}{2} = 7, \qquad x_2 = \frac{9-5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_3 = \mathbb{R} \setminus \{2, 7\}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2 \cap \mathbb{D}_3 = \mathbb{R} \setminus \big((-3,3) \cup \{2\} \cup \{2,7\}\big) = (-\infty, -3] \cup [3, 7) \cup (7, \infty)$$

(b) *Da* 2^{1000} *eine gerade Zahl ist, darf der Ausdruck unter der Wurzel nicht kleiner als* 0 *sein. Für* $x \in (0,1)$ *ist* $x^7 < x^3$. *Für* $x \in (-1,0)$ *ist* $x^7 > x^3$. *Für* $x < 1$ *ist* $x^7 - x^3 < 0$, *weshalb sich ergibt:*

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D} = [-1, 0] \cup [1, \infty)$$

(c) *Da* 53 *eine ungerade Zahl ist, muss hier nur der Nenner ungleich 0 sein.*

$$x^5 - x^3 = x^3(x^2 - 1) \neq 0$$

$x^2 - 1$ *hat in* $\mathbb{R}$ *die Nullstellen* $\{1, -1\}$ *und* x^3 *hat die Nullstelle* 0.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, -1, 0\}$$