KONVERSATORIUM "MATHEMATIK A FÜR ELEKTOTECHNIKER" WS 2014/15
27-10-2014

Beispiel 1
Untersuchen Sie die folgende Reihen auf Konvergenz:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}},$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \quad \text{für ein fixes } \epsilon > 0\,.$$

Beispiel 2
Bestimmen Sie den Definitionsbereich von

(a)

$$f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x-2}\,,$$

(b)

$$f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\,,$$

(c)

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}\,,$$

(d)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\,.$$

Beispiel 3
Gegeben sei die rational Funktion

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}\,.$$

Bestimmen Sie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $f(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1:

a) $n^{1+1/n} < 2n \quad \forall n \geq n_0$

$$n \sqrt[n]{n} < 2n$$

$$\sqrt[n]{n} < 2 \checkmark$$

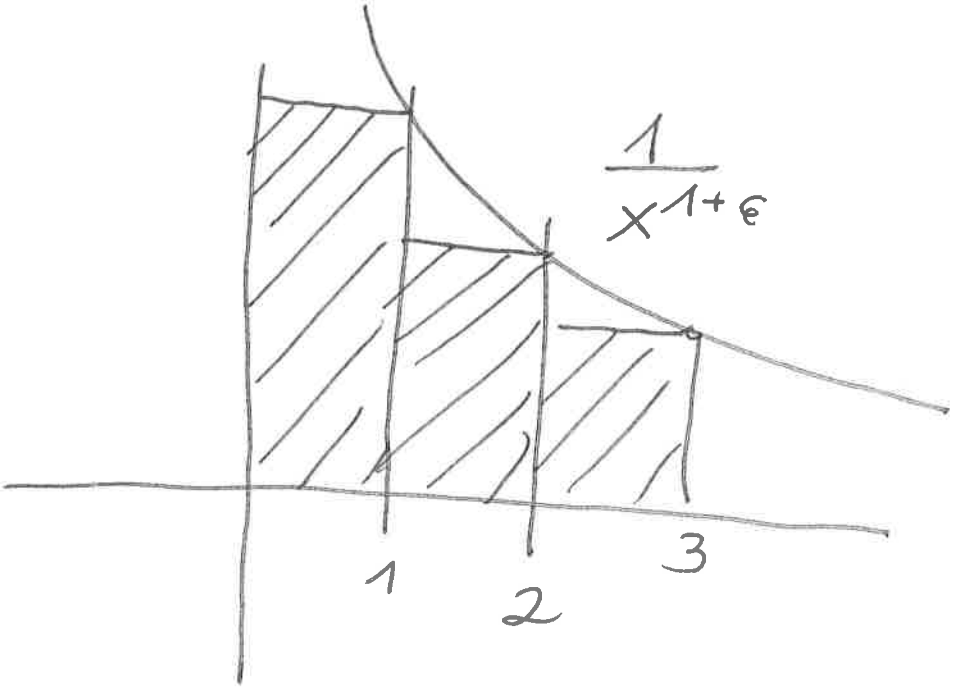
da $\sqrt[n]{n} \to 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2n} < \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}}$$

$\to$ Divergenz

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \le \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \, dx$$



 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$

Vergleiche Flächen: $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \le \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \, d$$

$$= -\varepsilon \frac{1}{x^{\varepsilon}} \Big|_{1}^{\infty} = \varepsilon$$

Beispiel 2:

a) $1-x \geq 0$

$x \leq 1$

$D_f^1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

$x-2 \geq 0$

$x \geq 2$

$D_f^2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

$D_f = D_f^1 \cap D_f^2 = \emptyset$

b) $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \iff$

$0 \leq x^2 \leq 1 \implies x \in [-1, 1]$

$D_f = [-1, 1]$

c.) $1 - x^2 \geq 0 \iff$

$x^2 \leq 1 \iff x \in [-1, 1] =: D_f^1$

$x^2 - 1 \geq 0 \iff$

$x^2 \geq 1 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) =: D_f^2$

$D_f = D_f^1 \cap D_f^2 = \{-1, 1\}$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

3.) Beispiel

$$\frac{a \cdot \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + d} = x$$

$$a\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b = cx\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+d$$

$$x\cdot(a^2+bc)+ab+bd$$

$$= x^2(ca+dc)$$

$$+x\cdot(cb+d^2)$$

$$x^2[\underbrace{ca+dc}_{\mathrm{I}=0}] + x[\underbrace{d^2-a^2}_{\mathrm{II}=0}]$$

$$+[\underbrace{-ab-bd}_{\mathrm{III}=0}] \equiv 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{I}=0$

$\Rightarrow \quad a=-d$

$\mathrm{II}=0$

$\Rightarrow \quad a^2=d^2$

$\mathrm{III}=0 \Rightarrow \quad a=-d$

: Es muß gelten $a = -d$

$$\boxed{f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}}$$

Probe: $$\frac{a\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx-a}\right)-a}$$

$$= \frac{a^2x + \cancel{ba} + bcx - \cancel{ab}}{\cancel{cax} + cb - \cancel{acx} + a^2}$$

$$= \frac{(a^2+bc)x}{a^2+cb} = x$$