Lösung Beispiel 2

Wenn in Beispiel 1 die Definition $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sinnvoll ist, dann muss gelten für $x = 1$ dass $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, wobei wir die Zahl e eingeführt haben als Grenzwert $e := \lim_{n\to\infty}(1 + (1/n))^n$. Zeigen Sie also dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right] = 0 \,.$$

Lösung: Sei $\epsilon > 0$ eine beliebige reele Zahl. Da die Potenzreihe e^x auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, muss sie auch für $x = 1$ konvergieren. Das bedeudet nun, dass für unser beliebig gewähltes ϵ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k!} < \epsilon \,.$$

Mit Hilfe des Binomschen Lehrsatzes folgt nun, für ein $n > n_0$

$$a_n := \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{(n-k)!\, n^k} - 1 \right) \frac{1}{k!} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} - 1 \right| \frac{1}{k!} =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} \left| \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} - 1 \right| \frac{1}{k!}}_{\text{Summe 1}} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} \left| \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} - 1 \right| \frac{1}{k!}}_{\text{Summe 2}} \,.$$

Bildet man nun den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ so folgt für die (endliche) Summe 1 (n_0 ist fix)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} - 1 \right| \frac{1}{k!} \;=\; 0 \,.$$

Summe 2 läßt sich nun wie folgt abschätzen:

$$\sum_{k=n_0}^{n} \underbrace{\left| \underbrace{\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n}}_{\in[0,1]} -1 \right|}_{\in[0,1]} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \epsilon \,.$$

Das Produkt $\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} \in [0,1]$, da nur positive Zahlen kleiner gleich eins mutipliziert werden. Daraus folgt unmittelbar $\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n} - 1 \in [-1,1]$

bzw. $-\left|\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}-1\right| \in [0,1]$. Insgesamt erhalten wir also:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| < \epsilon\,.$$

Der Limes unserer positiven Folge a_n ist also kleiner als jede strikt positive relle Zahl ϵ. Damit kann der Limes von a_n nur mehr null sein.