Übung 1
Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Und wann ist ihre Summe gleich 1/3?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log(x+1))^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)^n}$$

Übung 2
Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Übung 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2)$$

und

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} \cdots = \ln(2)/2.$$

Bemerkung: In der zweiten Reihe habe ich die Summanden der ersten Reihe einfach umsortiert...

Satz von Dini-Riemann: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen, dann existiert zu jeder beliebig vorgegebenen reellen Zahl S eine Umordnung σ, der Reihenglieder a_n, so dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen S konvergiert. Zu $S \in \{-\infty, +\infty\}$ gibt es eine Umordnung σ, so dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ gegen S bestimmt divergiert.

Unter der Umordnung σ versteht man eine bijektive Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der Menge der natürlichen Zahlen auf sich selbst (eine Permutation).