Übung 1

Sei $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ definierte charakteristische Funktion der Menge $A \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Punkte aus $\mathbb{R}$, für welche die Funktion $\chi_A(x)$ NICHT stetig/rechtsseitig/linksseitig-stetig ist, und bestimmen Sie, es sich um welche Art von Unstetigkeitstelle handelt, falls

(a) $A = [a, b]$;
(b) $A = (a, b)$;
(c) $A = [a, b)$;
(d) $A = (a, b]$.

Übung 2

Entscheiden Sie, ob die folgenden Räume V Vektorräume sind (begründen Sie Ihre Antworten!).

(a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$ mit den Operationen $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$, $t, x, y \in \mathbb{R}$;
(b) $V = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0\}$ mit der Summe von Polynomen und dem Produkt mit einer reellen Zahl.

Übung 3

Sei $\mathbb{R}_3[x] = \{p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad ≤ 3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume von $\mathbb{R}_3[x]$ sind. Falls ja, finden Sie deren Dimension und eine Basis.

(a) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0\}$;
(b) $V = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : a_1 = a_3, a_2 = 0\}$.