

Beispiel 1

Bestimmen Sie die $x \in \mathbb{R}$ für die die gegebenen Potenzreihen absolut konvergieren:

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k,$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2+x)^{2k}}{(2+(1/k))^k},$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{2^k} x^k.$$

Beispiel 2

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe absolut

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) \left[\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right]^n (x+1)^n.$$

Beispiel 3

Zeigen Sie, dass die Reihen $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $e^{-x} := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ auf ganz $\mathbb{R}$ absolut konvergieren und damit wohldefinierte Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Berechnen Sie nun damit folgende Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots \dots + a_1 x + a_0}{e^x},$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x},$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{\sinh x},$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}},$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$