Konversatorium "Mathematik A für Elektotechniker" WS 2014/15
24-11-2014

Beispiel 1
Wir haben im letzten Konversatorium gezeigt, dass die Reihen $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $e^{-x} := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ auf ganz $\mathbb{R}$ absolut konvergieren und damit wohldefinierte Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Wesentlich dabei ist, dass $|x| < \lim_{k\to\infty} (k!)^{(1/k)}$ bzw. "$\lim_{k\to\infty} (k!)^{(1/k)} = \infty$" ist. Wir wollen diesen wesentlichen Schritt der Vollständigkeit halber beweisen. Zeigen Sie also, dass zu jedem $M \in \mathbb{N}$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ sodass $M < (k!)^{(1/k)}$ gilt für alle $k \geq k_0$.

Beispiel 2
Wenn in Beispiel 1 die Definition $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sinnvoll ist, dann muss gelten für $x = 1$ dass $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, wobei wir die Zahl e eingeführt haben als Grenzwert $e := \lim_{n\to\infty}(1 + (1/n))^n$. Zeigen Sie also dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right] = 0\,.$$

Beispiel 3
Berechnen Sie (wenn nötig mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von e^x bzw. e^{-x}) folgende Grenzwerte:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}\,,$$
(b)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\cosh x}{\sinh x}\,,$$
(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\,,$$
(d)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}\,,$$
(e)
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\log x}{x}\,.$$