Wichtige Grenzwerte. *Sei $a_n > 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine monoton fallende Nullfolge und $b_n \geq 0$ eine beliebige Folge (nicht notwendiger Weise konvergent), dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{(1/a_n)} = e\,,$$

$$e^{\frac{a_n\, b_n}{1+a_n}} \leq (1+a_n)^{b_n} \leq e^{a_n\, b_n}$$

und falls der Grenzwert der Folge $a_n\, b_n$ existiert

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n}\,.$$

Beweis. Für ein $t \in [1, 1+a_n]$ $(a_n > 0!)$ gilt die Ungleichungen $\frac{1}{1+a_n} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ und auf Grund der Monotonie des Integrals

$$\int_1^{1+an} \frac{1}{1+a_n}\, dt \leq \int_1^{1+an} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_1^{1+an} 1\, dt \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{a_n}{1+a_n} \leq \ln(1+a_n) \leq a_n\,.$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist erhalten wir zu erst:

$$e^{\frac{a_n}{1+a_n}} \leq e^{\ln(1+a_n)} \leq e^{a_n} \quad \text{und damit} \quad e^{\frac{a_n}{1+a_n}} \leq (1+a_n) \leq e^{a_n}\,.\ \text{Daraus folgt}$$

$$e^{\frac{1}{1+a_n}} \leq (1+a_n)^{1/a_n} \leq e\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{1+a_n}} \leq \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/a_n} \leq e\,.$$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ erhalten wir so

$$e \leq \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/a_n} \leq e\,, \quad \text{oder eben} \quad \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{1/a_n} = e\,.$$

Aus $e^{\frac{a_n}{1+a_n}} \leq (1+a_n) \leq e^{a_n}$ folgt $e^{\frac{a_n\, b_n}{1+a_n}} \leq (1+a_n)^{b_n} \leq e^{a_n\, b_n}$ und, falls der Grenzwert der Folge $a_n b_n$ existiert, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ folgt weiters

$$e^{\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n} \leq \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} \leq e^{\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} a_n\, b_n}\,.$$

□