Folie zur Vorlesung "Mathematik A"
17-18. Januar 2019

Beispiele differenzierbarer Funktionen:

1. $f(x) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant, besitzt die Ableitung $f'(x) = 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0 = f'(x_0)$$

2. $f(x) = ax + b$, wobei $a \in \mathbb{R}$, besitzt Ableitung $f'(x) = a$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a = f'(x_0)$$

3. $f(x) = x^2$ besitzt Ableitung $f'(x) = 2x$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0) \end{aligned}$$

4. $f(x) = \sqrt{x}$ besitzt Ableitung $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0)$$

Satz: Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

Beweis: Sei $h \in \mathbb{R}$ und sei f an der Stelle x_0 differenzierbar. Dann gilt:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

d.h. $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Also ist f an der Stelle x_0 stetig.

$\square$

Bemerkung: Stetige Funktionen müssen im Allgemeinen **nicht** differenzierbar sein: z.B. ist $f(x) = |x|$ stetig, aber nicht differenzierbar bei 0.

Ableitungsregeln:

Im folgenden seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, differenzierbare Funktionen. Dann gelten folgende Rechenregeln für die Ableitungen:

1. **Linearität:**

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)+g(x)\big) - \big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)} \\
&= f'(x_0) + g'(x_0).
\end{aligned}$$

2. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt: $\big(cf(x)\big)' = c \cdot f'(x)$

Denn:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} c \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} = c \cdot f'(x_0)$$

3. **Produktregel:**

$$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Denn:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{\big(f(x)\cdot g(x)\big) - \big(f(x_0)\cdot g(x_0)\big)}{x - x_0} \\
= &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
= &\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
= &\lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} g(x) + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}_{\to g'(x_0)} \\
= &f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

4. **Quotientenregel:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \qquad \text{falls } f(x) \neq 0$$

Denn mit Hilfe der Produktregel folgt:

$$\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Speziell Fall von Quotienten Regel: $f(x) = 1$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}, \qquad \text{falls } g(x) \neq 0$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) g(x)g(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{-\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0}}_{\to -g'(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

5. **Kettenregel:**

$$\big((f \circ g)(x)\big)' = \big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{\to f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \\
&= f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

<u>Bemerkung:</u> Den Faktor $g'(x_0)$ entsteht durch "Nachdifferenzieren" und wird "innere Ableitung" genannt.

Beispiele:

1. $f(x) = x^3 + 2x - 1$:
$$f'(x) = (x^3)' + (2x-1)' = 3x^2 + 2.$$

2. $h(x) = (x^3 + 2x - 1)^3$: (Kettenregel mit $f(y) = y^3, g(x) = x^3 + 2x - 1$)
$$f'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 3 \cdot g(x)^2 \cdot g'(x) = 3(x^3 + 2x - 1)^2(3x^2 + 2).$$

3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n$. Dann ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

   Beweis durch vollständige Induktion: Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ wurden schon explizit berechnet. Nehmen wir nun an, daß die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte; wir müssen nun zeigen, daß die Aussage auch für $n+1$ gilt: Mit Hilfe der Produktregel folgt:
$$\big(x^{n+1}\big)' = \big(x \cdot x^n\big)' = 1 \cdot x^n + x \cdot \big(n \cdot x^{n-1}\big) = x^n + n \cdot x^n = (n+1) \cdot x^n.$$

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = \sqrt[n]{x}$ mit $x \geq 0$: Dann gilt $f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$.

   Denn: Sei $\varphi(x) = x^n$. Dann ist $\varphi(f(x)) = \varphi(\sqrt[n]{x}) = x$. Somit
$$\Big(\varphi(f(x))\Big)' = 1.$$
   Die linke Seite kann man aber mit Hilfe der Ketten regel wie folgt umschreiben:
$$1 = \Big(\varphi(f(x))\Big)' = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x) = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x) = n \cdot \sqrt[n]{x}^{\,n-1} \cdot f'(x),$$
   bzw. aufgelöst nach der gesuchten Ableitung $f'(x)$
$$f'(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{x}^{\,n-1}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}.$$

5. Sei $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Dann ist aufgrund der obigen Rechenregeln:
$$p'(x) = \big(a_3x^3)' + (a_2x^2)' + (a_1x_1 + a_0)' = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$
   Allgemeiner:
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \Longrightarrow \quad p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

Somit folgt aus Beispiel 5 und den obigen Rechenregeln (Linearität, Quotientenregel):

Satz: Polynome und rationale Funktionen sind differenzierbar!

Ableitung der Exponentialfunktion:

Zunächst beweisen wir
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Beweis:

Zur Erinnerung:
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

d.h.
$$e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

und somit
$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!}.$$

Wir untersuchen nun, was mit der obigen Summe auf der rechten Seite geschieht fü $x \to 0$:

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} \right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+2)!} \\ &=\; |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+2)!} \le |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| \cdot e^{|x|} \xrightarrow{x\to 0} 0. \end{aligned}$$

$\square$

Nun können wir die Ableitung der Exponentialfunktion bestimmen:
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = e^x,$$

d.h.
$$\left(e^x\right)' = e^x.$$

Ableitung der Winkelfunktionen:

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\text{Skriptum Seite C-45, Beispiel c):} \quad & \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \\
\text{Skriptum Seite C-45, Beispiel d):} \quad & \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0, \\
\text{Additionstheorem:} \quad & \cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h).
\end{aligned}$$

Ableitung des Cosinus:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \cos(x)}{h} - \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\to 0} - \sin(x) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\to 1} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

Ableitung des Sinus ergibt analog (siehe Skriptum):

$$\big(\sin(x)\big)' = \cos(x)$$

Ableitung des Tangens: Anwendung der Quotientenregel ergibt für $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\big(\tan(x)\big)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\big(-\sin(x)\big)}{\cos(x)^2} \\
&= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.
\end{aligned}$$

Ableitung des Cotangens: Anwendung der Quotientenregel ergibt für $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\big(\cot(x)\big)' &= \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin(x)^2} \\
&= \frac{-\big(\sin(x)^2 + \cos(x)^2\big)}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2}.
\end{aligned}$$

Weitere Beispiele::

1.
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ **nicht stetig** (siehe Skriptum C-49) und somit **nicht differenzierbar**.

2.
$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion $g(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ **stetig** (siehe C-49), allerdings dort **nicht differenzierbar**:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x \to 0$ besitzt $\sin\frac{1}{x}$ keinen Limes (vgl. mit vorherigem Beispiel), somit ist $g(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

3.
$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion $h(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ **differenzierbar**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

vgl. mit vorheriger Aufgabe für $x \to 0$.

Alle obigen Funktionen sind für $x \neq 0$ differenzierbar: z.B. ist

$$g'(x) = 1 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Weitere Beispiele zur Differenzierbarkeit:

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ **stetig**, da beide Teiläste stetig sind und an der Stelle 0 gilt:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} e^x = 1 = \lim_{x \to 0+} x^2 + x + 1 = \lim_{x \to 0+} f(x).$$

Außerdem ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ **differenzierbar**, da beide Teiläste differenzierbare Funktionen sind und an der Stelle 0 gilt:

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0-} e^x = 1 = \lim_{x \to 0+} 2x + 1 = \lim_{x \to 0+} f'(x).$$

2.

$$g(x) = e^{|x-1|} = \begin{cases} e^{x-1} & \text{für } x \geq 1 \\ e^{1-x} & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist $g(x)$ wieder eine auf ganz $\mathbb{R}$ **stetige** Funktion. Allerdings ist $g(x)$ an der Stelle 0 **nicht differenzierbar**, denn:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1+} g'(x) &= \lim_{x \to 1+} \left(e^{x-1}\right)' = \lim_{x \to 1+} e^{x-1} = e^0 = 1, \text{aber} \\ \lim_{x \to 1-} g'(x) &= \lim_{x \to 1-} \left(e^{1-x}\right)' = \lim_{x \to 1-} -e^{1-x} = -e^0 = -1. \end{aligned}$$

Also ist $\lim_{x \to 1+} g'(x) \neq \lim_{x \to 1-} g'(x)$, und somit ist $g(x)$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar.