

Folie zur Vorlesung "Mathematik A"

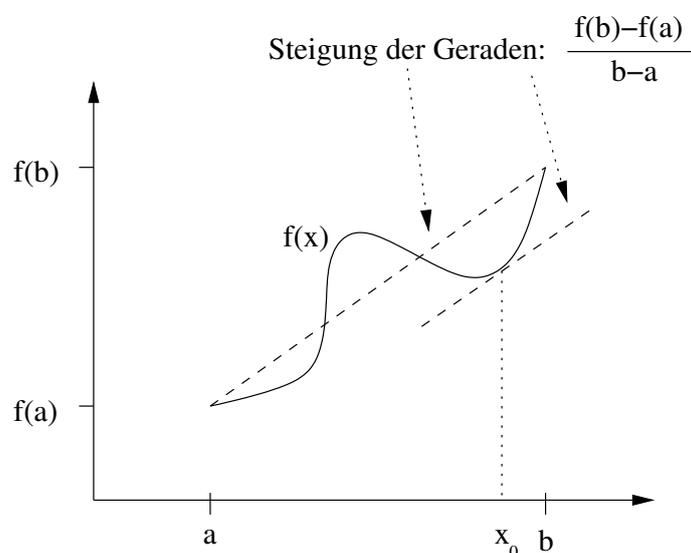
24-25. Januar 2019

1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und differenzierbar in (a, b) . Dann gibt es einen inneren Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Skizze:



Beweis: Setze

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Es gilt:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a),$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a),$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Somit ist der Satz von Rolle anwendbar, d.h. es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $g'(x_0) = 0$. Also:

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Umformulierung des Satzes:

Setze $a = x$ und $b = x + h$. Dann lässt sich x_0 schreiben als $x_0 = x + \delta h$ für $0 < \delta < 1$ und somit

$$f'(x + \delta h) = f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

bzw. nach $f(x + h)$ aufgelöst:

$$f(x + h) = f(x) + h \cdot f'(x + \delta h) \quad \text{für ein } \delta \in (0, 1).$$

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz:

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und differenzierbar in (a, b) . Dann gilt:

1. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f eine **konstante** Funktion. Denn:

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot \underbrace{f'(a + \delta h)}_{=0} = f(a) \quad \text{für alle } h \in (0, b - a).$$

2. Gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so ist $f(x) - g(x)$ **konstant**. Denn:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'(x) = 0,$$

und aufgrund der vorhergehenden Folgerung muß $f(x) - g(x)$ somit eine konstante Funktion sein.

3. Es gilt:

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \implies f(x) \text{ monoton wachsend}$$

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ strikt monoton wachsend}$$

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \implies f(x) \text{ monoton fallend}$$

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ strikt monoton fallend}$$

Denn: gelte $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und sei $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$. Wir schreiben x_2 als $x_2 = x_1 + h$ mit $h > 0$. Dann gilt:

$$f(x_2) = f(x_1 + h) = f(x_1) + h \cdot \underbrace{f'(x_1 + \delta h)}_{\geq 0} \geq f(x_1).$$

Der Rest läßt sich analog beweisen.

2.Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

Satz: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und differenzierbar in (a, b) . Ferner gelte für alle $x \in (a, b)$: $g'(x) \neq 0$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt einen inneren Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis: Setze

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Wegen $g'(x) \neq 0$ kann $g(x)$ nicht konstant sein und muß strikt monoton wachsend oder strikt monoton fallend sein, d.h. es gilt $g(a) < g(b)$ bzw. $g(a) > g(b)$; in jedem Fall gilt $g(a) \neq g(b)$.

Außerdem gilt:

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = f(a),$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a),$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Somit ist der Satz von Rolle anwendbar, d.h. es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $h'(x_0) = 0$. Also:

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x_0) \implies \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□