

INVERSE MATRIZEN

Achtung! Hier $m = n$ $\underbrace{\text{Anzahlspalten}}_n = \underbrace{\text{Anzahlzeilen}}_m$

Def: Eine $(n \times n)$ -Matrix A heißt invertierbar wenn es eine $(n \times n)$ -Matrix B existiert mit

$$B \cdot A = A \cdot B = I$$

B heißt inverse Matrix A^{-1} zu A .

Bemerkung: Wenn A invertierbar, dann hat LGS

$$A \vec{x} = \vec{b} \text{ die Lösung } \boxed{\vec{x} = A^{-1} \vec{b}}$$

Satz: A ist invertierbar, wenn $\boxed{\text{Rang } A = n}$

? Inverse berechnen: mit Gauß-Jordan Algorithmus angewandt auf die erweiterte Matrix $(A, I) \rightarrow$

Zeilenumformungen bekommt man die erweiterte Matrix (I, A^{-1}) .

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Gauß-Jordan}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) + Z_1 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) : 3 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \underbrace{\hspace{1cm}}_{A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

! Beim Zeilenumformungen $\rightarrow$ eine Nullzeile vorkommt, ist A nicht invertierbar.

★ Eigenschaften invertierbarer Matrizen

(1) A invertierbar $\Rightarrow A^{-1}$ invertierbar und

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(2) A und B invertierbar $\Rightarrow A \cdot B$ invertierbar und

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

DETERMINANTEN

! Jeder quadratische Matrix ist eine Zahl - ihre **Determinante** - zugeordnet

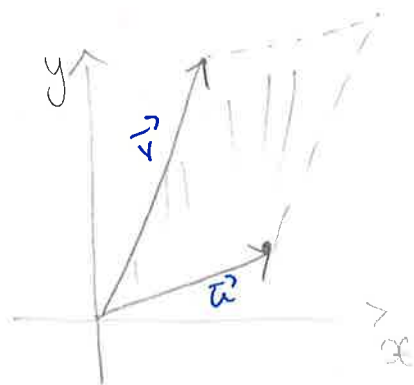
$$A \rightarrow \det A \text{ oder } |A|$$

Geometrische Interpretation

$n=1$: $A = (a)$; $\det A = a$

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

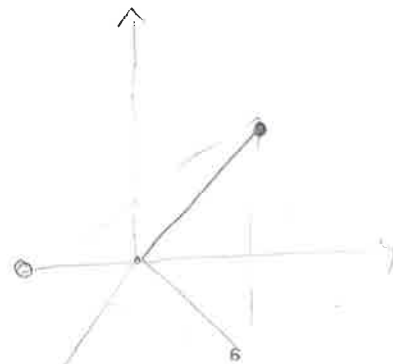
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} ; \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$



$|\det A|$ = die Fläche des Parallelogrammes, von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.

$n=3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$$



Volumen des Parallelepipedes von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannt

Determinante berechnen(1) A eine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} ; \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$

(2) A eine 3×3 Matrix $\rightarrow$ Determinante mit

Regel von Sarrus

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Rechenschema für Determinante:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$$\rightarrow a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \quad 2 \\ 1 \quad -2 \\ -1 \quad 2 \end{array}$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{4}}$$

$$= 31 =$$

Determinante eine $(n \times n)$ -Matrix

Laplace Entwicklungssatz

- Eine Det. kann man nach einer beliebigen Zeile oder Spalte von A entwickelt werden, dabei ist das Vorzeichen der Elemente zu beachten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach 1. Zeile (idealerweise wählt man eine Zeile oder Spalte einer Matrix, in der möglichst viele Nullen stehen.)

→ betrachtet man a_{11} (Pivotelement) und streicht man die Zeile und Spalte in der sich a_{11} befindet

$$\det A = a_{11} (-1)^{1+1} \det A_1 + a_{12} (-1)^{1+2} \det A_2 + \dots + a_{1n} (-1)^{1+n} \det A_n$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{pmatrix}$$

$A_1, \dots, A_n : (n-1) \times (n-1)$
Matrizen.

$$= 32 =$$

! Entwickelt man nach i. Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

A_{ij} : $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, durch streichen von Spalte und Zeile wo sich a_{ij} befindet.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = ?$

Entwickeln nach 3. Spalte

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 - (-2))}_0 + 0 + (-1) \cdot (-2 - 2) = 4$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{pmatrix}$

$$\det A = 0 \cdot (\quad) + (-5) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & -10 \end{vmatrix} + (4) \cdot (-1)^{4+2} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

EIGENSCHAFTEN VON DETERMINANTEN

$$(1) \det A^T = \det A$$

(2) $\det(\text{Dreiecksmatrix}) = \text{Produkt der Diagonalelemente}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ & a_{22} & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} ; \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Rechenregel für Determinanten

(1) Wenn eine Zeile von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, ändert sich die Determinante mit λ -Faktor.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det B = \lambda \cdot \det A$$

(2) Wenn A eine Nullzeile hat $\Rightarrow \det A = 0$

(3) A 2 gleiche Zeilen hat $\Rightarrow \det A = 0$

(4) - Die Zeilen von A abhängig $\Rightarrow \det A = 0$

(5) Die Det. ist linear in jeder einzelnen Zeile:

$$\overset{=34=}{\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

(6) Vertauschen von Zeilen $\Rightarrow$ Determinante ändert der Vorzeichen.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

(1) - (6) gelten für Spalten statt Zeilen.

Produktsatz $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Satz: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$
 $\det A = 0 \Leftrightarrow \text{Rang } A < n$

! A invertierbar:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I \Rightarrow$$

$$\det A^{-1} \cdot \det A = 1 \Rightarrow \boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$$

! Reguläre Matrizen A = Matrizen mit $\boxed{\det A \neq 0}$

Die Regel von CRAMER

Ist A eine $(n \times n)$ -Matrix und besitzt das GS

$A \vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung $(\Leftrightarrow \det A \neq 0)$ $(\Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang}(A, \vec{b}) = n)$

dann $x_i = \frac{\det C_i}{\det A}$, wobei C_i = aus A indem

man die i -te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt wird.

= 35 =

Bsp Man löse das LGS $A \vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 5 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = 3$, eindeutige Lösung

$x_1 =$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det C_1}{\det A} = \frac{25}{5} = 5 ; x_2 = \frac{\det C_2}{\det A} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det C_3}{\det A} = \frac{25}{5} = 5 ; \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

! Cramersche Regel wird nur bei eindeutig lösbar
 • quadratischen LGS angewendet, und die Determinante zu berechnen ist lästig.
 (m=n)

! Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist vorzuziehen.

Def $A : (m \times n)$ -Matrix heißt orthogonal wenn

(i) $\|\vec{z}_i\| = 1 \quad \forall i = 1, \dots, m ; \vec{z}_i = i\text{-ter Zeilenvektor}$

(ii) $\langle \vec{z}_i, \vec{z}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j ; i, j = 1, \dots, m$

EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Gegeben : A eine $(n \times n)$ Matrix

Gesucht : Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, sodass $A\vec{x}$ und $\vec{x}$ in die gleiche Richtung zeigen ($\vec{x} \neq \vec{0}$)

$$(*) \boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$[\vec{x} = \vec{0}]$ ist immer eine Lösung, daher ausgeschlossen

$$(*) \Leftrightarrow A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}}$$

★★

$\downarrow B$

homogenes Gleichungssystem

$$\boxed{B\vec{x} = \vec{0}}$$

hat Lösung $\vec{0}$, wenn
hat Lösungen $\neq \vec{0}$, wenn

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Rang } B = n \\ \text{Rang } B < n \end{array}}$$

$\Rightarrow \det B \neq 0$
 $\Rightarrow \det B = 0$

Gesucht Lösungen $\neq \vec{0}$, wenn $\boxed{\det B = 0} \Leftrightarrow$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Polynom in λ

- $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$: Polynom n-ten Grades in λ , das charakteristische Polynom von A.
- $P(\lambda)$ hat n Lösungen (Können auch komplex sein), mit Vielfachheiten : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen Eigenwerte von A.
- Eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ des LGS : $(A - \lambda_k I)\vec{x} = \vec{0}$ heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ_k .

=34=

Bemerkung: $\vec{x}$ Eigenvektor von A ^(zu λ_k), dann ist auch $\varphi \cdot \vec{x}$ Eigenvektor von A , $\forall \varphi \neq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ zu λ_k .

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; Eigenwerte & Eigenvektoren = ?

Eigenwerte: $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right]$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 + 0 + 0 - (1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 - 2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$: $\vec{x}^{(1)}$

$\vec{x}^{(1)}$ Lösung des LGS: $(A - \lambda_1 I) \vec{x} = \vec{0}$
 $\det A = 0$, Rang < 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

$x_1 + x_3 = 0$

Setze $\begin{cases} x_1 = t \\ x_3 = -t \end{cases}$

Eigenraum: $V(\lambda_1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

Wähle $t=1$

=> Eigenvektor $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$, $\vec{x}^{(2)}$ = Lösung des LGS:

$$(A - \lambda_2 I) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\det = 0 \Rightarrow \text{rang}(A - \lambda_2 I) < 3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) + 2z_1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \end{array} \right) + z_2 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_3 = t$$

$$-x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = t$$

$$-x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = t$$

Eigenraum: $V(\lambda_2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \text{Gerade in } \mathbb{R}^3$

Wähle $t = 1 \Rightarrow$ Eigenvektor $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -1$: $\vec{x}^{(3)}$

• $\vec{x}^{(3)}$ Lösung des LGL: $(A - \lambda_3 I) \vec{x}^{(3)} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) - \frac{1}{2} z_1 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) - 2z_2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_3 = t \\ \frac{1}{2} x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2t \\ 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = t \end{cases} \Rightarrow$$

Eigenraum zu λ_2

$$V(\lambda_2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \rightarrow \text{Gerade in } \mathbb{R}^3$$

Setze: $t = 1 \Rightarrow \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geometrische Vielfachheit $v(\lambda_1) = v(\lambda_2) = v(\lambda_3) = 1$

Vielfachheit von Eigenwerten

• $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ Polynom n-tes Grades

$P(\lambda) = 0$ hat n Nullstellen: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes $\lambda_k = \mu(\lambda_k)$
 = Vielfachheit der Nullstelle λ_k in $P(\lambda) = 0$

• Geometrische Vielfachheit von $\lambda_k = v(\lambda_k)$

= Dimension des Lösungsraums $V(\lambda_k)$

= Lösung des LGS: $(A - \lambda_k) \vec{x}^{(k)} = \vec{0}$

= Anzahl freier Parameter

Beispiele:

→ vorher (Bsp) Seite 37

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ = einfache Nullstellen in $P(\lambda) = 0 \Rightarrow$

$$\mu(\lambda_1) = \mu(\lambda_2) = \mu(\lambda_3) = 1$$

$V(\lambda_1), V(\lambda_2), V(\lambda_3)$: 1 : Parameter frei $\Rightarrow$

$$v(\lambda_1) = v(\lambda_2) = v(\lambda_3) = 1$$

=40=

Bsp: Eigenwerte + Vielfachheiten von $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

• Eigenwerte $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & ; \mu(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = -1 & ; \mu(\lambda_2) = 2 \end{cases}$$

• Eigenvektoren & Eigenräume

zu $\boxed{\lambda_1 = 1}$ Lösungsraum von $(A - I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$
 $V(\lambda_1) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow V(\lambda_1) = 1$

zu $\boxed{\lambda_2 = -1}$ Lösungsraum von $(A + I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$
 $0 \leq V(\lambda_2) \leq 2$
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = t$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{V(\lambda_2) = 1}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 2 \text{ mit } \mu(\lambda) = 2$$

Eigenraum: $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 = t \in \mathbb{R}, x_2 = s \in \mathbb{R}$$

$$V(\lambda) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{V(2) = 2}$$

Satz: $\boxed{\mu(\lambda_k) \geq V(\lambda_k) > 0}$

Bemerkung

$A : (n \times n)$ -Matrix hat n Eigenwerte mit:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{Summe der Diagonalelemente von } A \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A \Rightarrow \text{Wenn } \det A = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

A hat mindestens 1 Eigenwert $= 0$

◊ Wenn $A =$ Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ & \alpha_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

dann A hat $\begin{cases} \text{Eigenwerte } \lambda_1 = \alpha_1, \dots, \lambda_n = \alpha_n \\ \text{Eigenräume : Lösungen von } (A - \alpha_i E)x = 0 \end{cases}$

Satz: Wenn A Eigenvektor $\vec{x}$ zum Eigenwert λ besitzt, dann ist $\vec{x}$ auch Eigenvektor von

(i) αA zum Eigenwert $\alpha \lambda$

(ii) A^m zum Eigenwert λ^m

(iii) $A + \beta I$ zum Eigenwert $\lambda + \beta$

(iv) $\alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \dots + \alpha_0 I$ zum Eigenwert $\alpha_m \lambda^m + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_0$