Satz:

(1) A und A^t haben dieselben Eigenwerte (eventuell verschiedene Eigenräume)

(2) A invertierbar, wenn alle Eigenwerte $\neq 0$.

$\lambda \to$ Eigenwert von A mit Eigenvektor b,
dann $\frac{1}{\lambda} \to$ Eigenwert von A^{-1} mit Eigenvektor b.

- $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
  Wenn $\lambda_i = 0 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ nicht invertierbar
- Wenn alle $\lambda_i \neq 0$
  $\frac{1}{\lambda} \,/\, A\vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow A^{-1} \,/\, \vec{x} = \frac{1}{\lambda} A \vec{x} \Rightarrow A^{-1} \vec{x} = \frac{1}{\lambda} \vec{x} \Rightarrow$
  $\frac{1}{\lambda}$ Eigewert von A^{-1}

(3) Wenn A regulär ($\det A \neq 0$) dann haben A und $B^{-1}AB$ die gleichen Eigenwerte
[A und $B^{-1}AB$ heißen ähnlich]

$$\det(B^{-1}AB - \lambda I) = \det\left(B^{-1}(AB - B\lambda)\right) =$$
$$\det\left(B^{-1}(A - \lambda I)B\right) = \det B^{-1} \det(A - \lambda I) \det B$$
$$= \det(A - \lambda I) \cdot \det \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{I} = \det(A - \lambda I)$$

Satz: Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

SYMMETRISCHE MATRIZEN

Bemerkung : A : $(n\times n)$ - Matrix mit Komplexe Einträge : $\langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \overline{A^t}\vec{y}\rangle$

Def : A heißt symmetrisch: wenn $A^t = A$

Bsp : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Satz : Sei A : $\underbrace{(n\times n) - \text{Matrix}}_{\text{symmetrisch \& reel}}$. Dann gilt :

(1) Alle Eigenwerte sind reel

(2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

$$\begin{cases} \lambda_i \to \vec{x}_i \\ \lambda_k \to \vec{x}_k \end{cases} \Rightarrow \langle \vec{x}_i, \vec{x}_k\rangle = 0 \quad , \forall\ i \neq k.$$

(3) Algebraische und geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes sind gleich.

HAUPTACHSENTRANSFORMATION

Sei A : $(n\times n)$ - Matrix, symmetrisch & reel.

$\to$ wir finden n linear unabhängige (reele!) Eigenvektoren.

(1) Auf Länge 1 normieren

(2) Gram-Schmidt orthogonalisieren $\Rightarrow$ Orthonormalbasis von

Eigenvektoren.

→ Seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$: die (reelen) Eigenwerte, aufsteigend geordnet, und entsprechend ihren Vielfachheiten wiederholt.

→ $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}$: die (reelen) zugehörigen Eigenvektoren, eine Orthonormalbasis.

$$T = (\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)})$$

T = orthogonale Matrix.

$$AT = (A\vec{x}^{(1)}, \ldots, A\vec{x}^{(n)}) = (\lambda_1 \vec{x}^{(1)}, \ldots, \lambda_n \vec{x}^{(n)}) = TD$$

mit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{T^{-1}AT = D}$

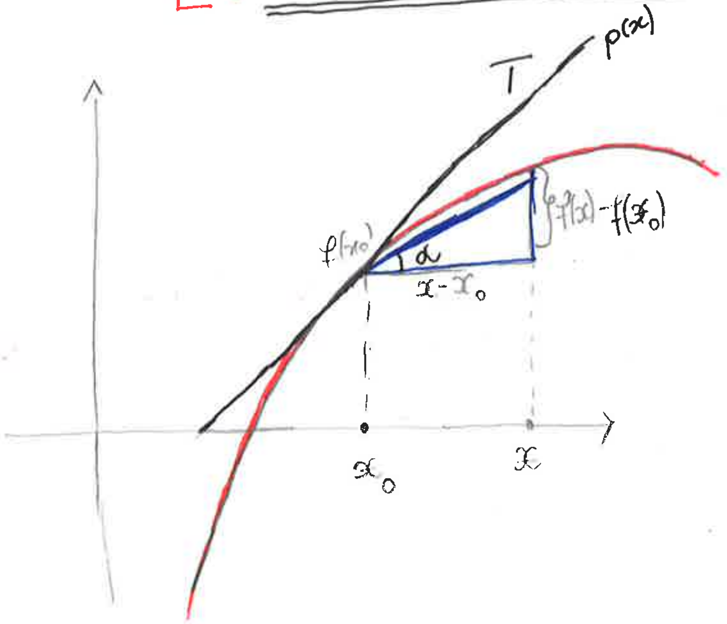
Satz: Jede reele, symmetrische Matrix kann mittels einer orthogonalen Matrix T auf Diagonalgestalt gebracht werden:

$$\boxed{T^{-1}AT = D}$$

D : Diagonalmatrix mit Eigenwerte von A auf Hauptdiagonale.

T : Spalten von T, auf Länge 1 normierte, paarweise orthogonale Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_k.

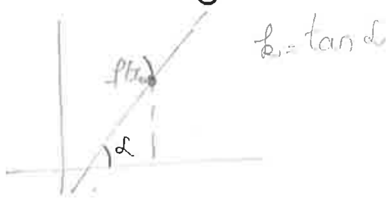
E: DIFFERENTIALRECHNUNG



! Die Funktion f soll im Punkt $(x_0, f(x_0))$ durch eine Gerade (Tangente) möglichst gut angenähert werden.

d.h. $\underline{p(x_0) = f(x_0)}$

Gerade $p(x)$ durch Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit Anstieg k:



$$\boxed{p(x) = f(x_0) + k\,(x - x_0)}$$

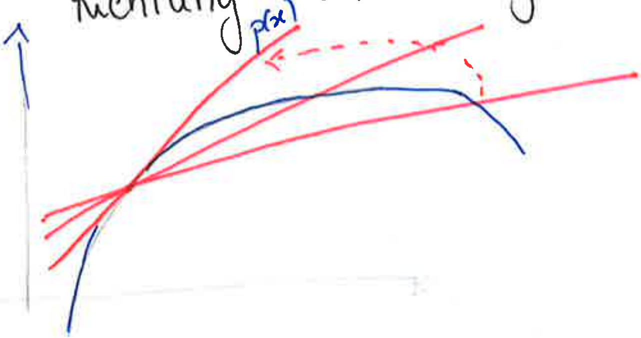
Wie wird k gewählt?

→ Man fängt mit einer Sekante an, also mit einer Geraden, welche die Fkt f nicht in einem, sondern in 2 Punkten schneidet: $\underbrace{(x_0, f(x_0))}_{P_1}$ — $\underbrace{(x, f(x))}_{P_2}$

Die Steigung der Sekante ist

$$\tan(\alpha) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

→ Indem wir die Differenz $x - x_0$ immer kleiner werden lassen ($\lim\limits_{x \to x_0}$) strebt die Sekante immer weiter in Richtung der Tangente.



Diese Sekante schneidet die Fkt anfangs noch an den Stellen x_0 und x. Wenn die Differenz $(x - x_0)$ klein wird, dann schneidet die

Gerade (Sekande) die Fkt f nur in einem einzigen Punkt.
Aus dieser Sekante wurde somit die Tangente.

D.h.: wähle $\boxed{k = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ = Anstieg der Tangente!

$$\boxed{k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) + f(x+h)}{h}}$$

k - muss existieren!

Def Sei $f : I \to \mathbb{R}$, I offenes Interval. und $x_0 \in I$. f heißt im Punkt x_0 differentierbar, wenn
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := f'(x_0)$$
existiert.

Dieser Grenzwert $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f in x_0
[$\Leftrightarrow$ Anstieg (Steigung) der Tangente an der Stelle $x_0, f(x_0)$]

Schreibweise: $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

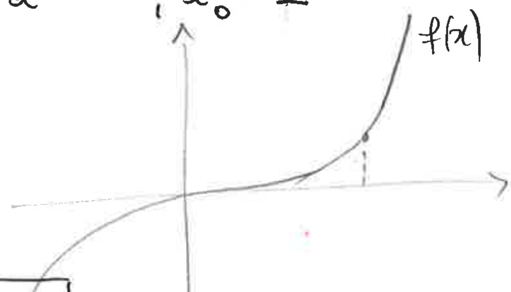
$\to$ Die erste Ableitung von f in x_0.

Bemerkung: f ist in x_0 diff'bar $\Leftrightarrow$ f hat im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente.

Bsp (1) Bestimmen $f'(x_0)$ für $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$

$$f'(1) = f'(x_0) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$$

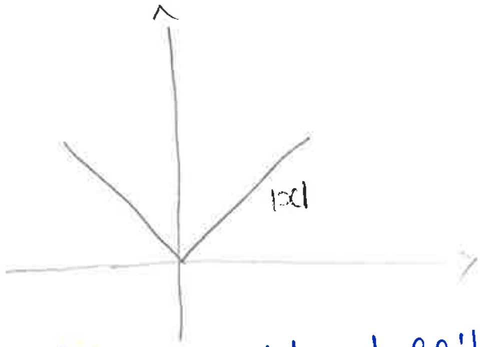
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3 \Rightarrow \boxed{f'(1) = 3}$$



Da $\exists \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3 \Rightarrow f$ ist in 1 diff'bar.

Satz Jede in x_0 differentierbare Fkt ist in x_0 stetig.

$\rightarrow$ Umgekehrt $\rightarrow$ falsch (Bsp: $f(x) = |x|$)



stetig, nicht diff'bar.

Regel $\begin{cases} f \text{ diff'bar} \Rightarrow f \text{ stetig} \\ f \text{ nicht stetig} \Rightarrow f \text{ nicht diff'bar.} \end{cases}$

DIFFERENZIERBARKEIT IM INTERVALL

Sei $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, offenes Intervall.

Def: f heißt auf I diff'bar, wenn f in jedem Punkt x von I diff'bar ist $\Leftrightarrow$ wenn $f'(x)$ in jedem Punkt $x \in I$ existiert.

- Für $f(x)$, die Funktion $f'(x)$ heißt die (erste) Ableitung von f.
- Den Übergang von f zu f' nennt man $\boxed{\text{Ableiten}}$ oder $\boxed{\text{Differenzieren}}$.

$f \longrightarrow f'$ oder $\frac{df(x)}{dx}$, oder $\frac{d}{dx} f(x)$

<u>Bemerkung</u>: Der Begriff der Diff'keit ist momentan nur für offene Intervalle erklärt, er lässt sich z.B auf abgeschlossene Intervalle verallgemeinern. Man untersucht dann in den Randpunkten die <u>rechts</u>- bzw. <u>linksseitigen</u> Grenzwerte und spricht von <u>rechts</u>- bzw. <u>linksseitigen</u> Halbtangenten.

RECHNEN MIT DIFFERENZIERBAREN FUNKTIONEN

- Die elementaren Fkt sind an allen Stellen diff'bar, an denen sie definiert sind.
- Man sollte die Ableitungen der wichtigsten elementaren Fkt kennen.
- Beim Differenzieren geht man selten auf die Definition zurück, sondern man benutzt folgende Differentiationsregeln, um komplizierte Fkt. zu differenzieren.

Ableitungsregeln : $f, g : I \to \mathbb{R}$, diff'bar

(1) Summenregel [Linearität]

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

(2) Multiplikation mit einer Konstante:

$$[c f(x)]' = c f'(x) \quad , \forall c \in \mathbb{R}.$$

(3) Produktregel :

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(4) Quotientenregel: $[g(x) \neq 0]$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

(5) Kettenregel:

$$\left((f\circ g)(x)\right)' = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Hier: $g: I \to J$ und $f: J \to \mathbb{R}$ (damit $f\circ g$ zusammensetzen kann), f, g diff'bar.

Dann ist auch $f\circ g$ diff'bar und

$$\left((f\circ g)(x)\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Folgerung: Polynome und rationale Fkt. sind in ihrem Def.bereich diff'bar.

Bsp: Ableitungen elementaren Fkt.

→ Siehe Formelsammlung

→ Alle Formeln kann man natürlich beweisen!

(1) Für $f(x) = c$; $f'(x) = 0$

Siehe Folie 17.01.2019 $\boxed{\text{Seite 1}}$ Bsp 1

(2) $f(x) = ax + b$; $f'(x) = a$

Siehe Folie 17.01.2019 $\boxed{\text{Seite 1}}$ Bsp 2.

(3) Für $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$; Folie $\boxed{\text{Seite 1}}$ Bsp3

- Weitere Beispiele → Folie (Seite 4

ABLEITUNG DER UMKEHRFUNKTION

Satz: $I \to$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und diff'bar im x_0, mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfkt. f^{-1} diff'bar im $\boxed{y_0 = f(x_0)}$ und

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Bsp: Sei $g(y) = \arcsin y$, $y \in [-1, 1]$

$g(y)$ ist Umkehrfkt von $f(x) = \sin x = y$

$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\qquad g(y) = f^{-1}(y) = \arcsin y$

$$g'(y) = (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2 x}_{y}}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

EINSEITIGE ABLEITUNGEN

Def: Die Funktion f heißt in x_0 linksseitig diff'bar wenn die linksseitige Ableitung $\boxed{f'(x_0-) = \lim\limits_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ existiert. Analog heißt f in x_0 rechtseitig diff'bar, wenn die rechtseitige Ableitung existiert: $f'(x_0+) = \lim\limits_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

! f ist genau dann diff'bar in x_0 wenn $f'(x_0-)$ und $f'(x_0+)$ existieren und gleich sind.

Bsp (1)+(2) → siehe Folie 17-18.01.2019 Seite 8.

HÖHERE ABLEITUNGEN

- $f: I \to \mathbb{R}$, I offen und f diff'bar. $\Rightarrow \exists$ die Ableitung $\underbrace{f'(x)}_{g(x)} \to$ neue Fkt. Ist $f'(x) = g(x)$ diff'bar dann kann man sie wieder ableiten $g'(x) = (f'(x))' = f''(x) \to$ die 2. Ableitung von f in x_0. u.s.w, den Vorgang wiederholen.

$$\left.\begin{array}{l} f^{(n)}(x) \\ \dfrac{d^n f(x)}{dx} \end{array}\right\} : \begin{array}{l} \text{die } n\text{.te Ableitung von } f. \\ n = \text{Ordnung der Ableitung.} \end{array}$$

Bemerkung: Besitzt f Ableitungen beliebig hoher Ordnung, so nennt man f beliebig oft diff'bar.

Bsp: $f(x) = e^x \to$ beliebig oft diff'bar.

$f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall\, n = 1, 2, \ldots$