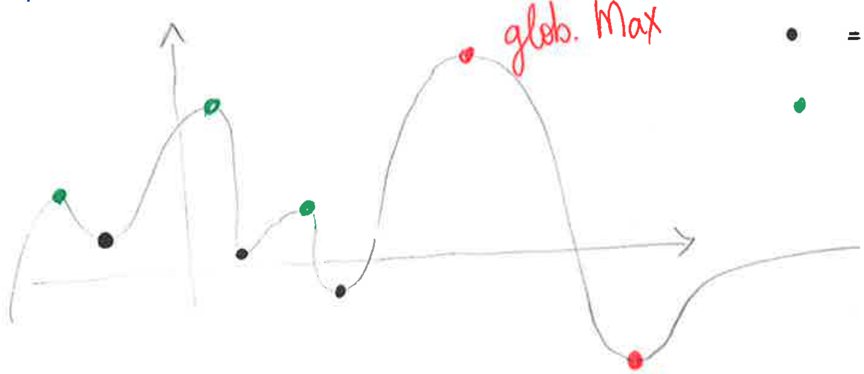
MAXIMA UND MINIMA

$f: I \to \mathbb{R}$

Def • $x_0 \in I$: lokales Minimum von f wenn, $\forall x \in$ in einer Umgebung von x_0 : $f(x_0) \le f(x)$

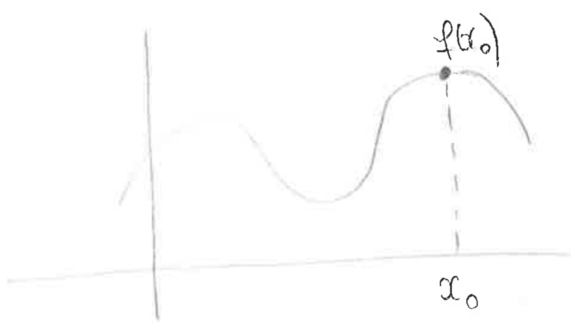
• $x_0 \in I$: lokales Max von f wenn, $\forall x$ in einer Umgebung von x_0 : $f(x_0) \ge f(x)$

Lokale Max und lok. Minima = lokale Extrema



• $x_0 \in I$: globales Min : $f(x) \ge f(x_0)$, $\forall x \in I$

• $x_0 \in I$ globales Max $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in I$



x_0 = lok. Max $\Rightarrow$ in eine δ-Umgebung von x_0

$\boxed{f(x) \le f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \le 0}$

• $x < x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \ge 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 -) \ge 0$$

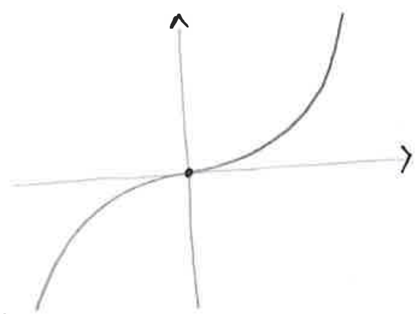
• $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0 \Rightarrow$ $f'(x_0 +) \le 0$

Wenn $\exists f'(x_0-) \geq 0$, $\exists f'(x_0+) \leq 0$ $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Satz Sei $f: [a,b] \to R$ diff'bar in einem inneren Pkt. x_0 des Intervalls, und hat f in x_0 ein lokales Extremum, dann $\boxed{f'(x_0)=0}$

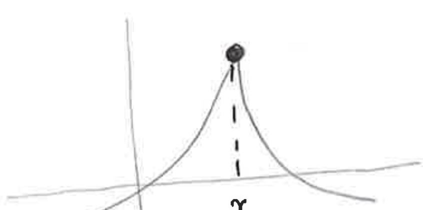
! Bedierund not wendig, aber nicht hinreichend
d.h
- f lok. Extr. in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$
- Wenn $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ muss nicht unbedingt lok. Extrema sein (Kann aber)

Bsp: $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$



$x = 0$: Kein lok. Extrema.

! Extrema Kann auch vorliegen in x_0, wo f nicht diff'bar ist.



$\to f$ ist in x_0 nicht diff'bar aber hat Extrema in x_0

! D.h = Die Punkte wo f nicht diff'bar ist, muss man extra untersuchen.

! Jeder absolute Extremwert ist auch ein relativer Extremwert

Erinnerung (Stetigkeit Seite C-50)

Satz von Weierstraß

Satz [Max und Min] $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$. Dann ist f auf $[a,b]$ beschränkt. Es gibt (mindestens) einen Punkt $x_0 \in [a,b]$, in dem f das Max annimmt und einen Punkt $x_1 \in [a,b]$, in dem f das Min. annimmt (globales Max und Min)

- Wenn $x_0 \in (a,b)$ dann muß $f'(x_0) = 0$ sein. Es kann aber $\boxed{x_0 = a}$ oder $\boxed{x_0 = b}$

Satz von Rolle

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b). Es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Zusammenfassung Extremwerte

! Extremwerte können nur in Punkten x auftreten, in denen
[1] $f'(x) = 0$ (kritische Punkte, stationäre Punkte)
oder [2] f nicht diff'bar ist (z.B Randpunkte)

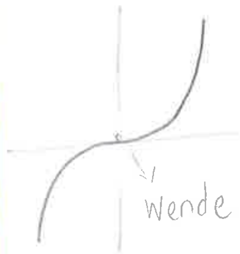
Praktisches Vorgehen

[1] $f'(x) = 0$: Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen (Kritische Punkte)

→ Untersuchung der kritischen Punte x_0

(a) ohne höhere Ableitungen

- wechselt f' in x_0 das Vorzeichen ⇒ in x_0 Extremum, zwar:
  - → wechselt f' bei x_0 von + nach − ⇒ x_0 = rel Max
  - → wechselt f' bei x_0 von − nach + ⇒ x_0 = rel Min
- wechselt f' bei x_0 nicht das Vorzeichen = Horizontalwendepkt.



(b) Satz von Weierstraß oder andere Überlegungen.

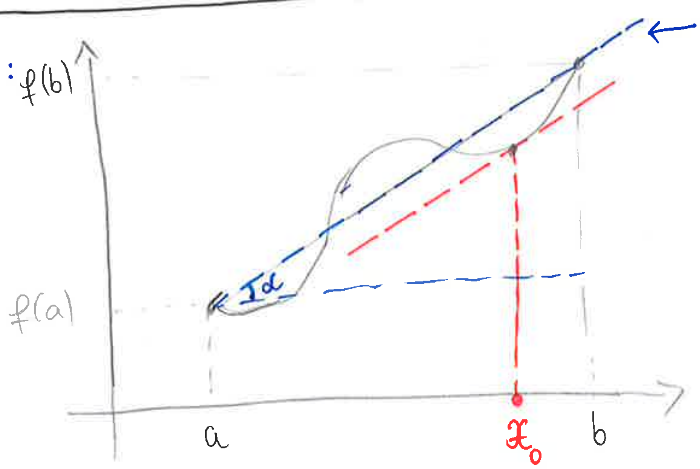
[2] Punkte, in denen f nicht diff'bar ist (z.B Randpunkte) müssen extra betrachtet werden. Man vergleiche z.B die Funktionswerte der Größe nach.

MITTELWERTSÄTZE

1. MWS der Diff.rechnung

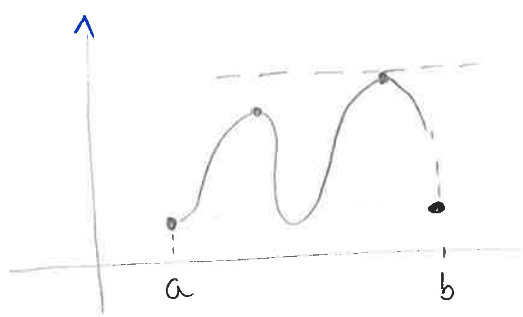
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und im (a,b) diff'bar. Dann $\exists\, x_0 \in (a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

Skizze:



Steigung $\tan\alpha \overset{\shortparallel}{=} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Satz von Rolle



FOLGERUNGEN:

(1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diff.bar und $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$. $\Rightarrow$ f = Konstante Fkt.

(2) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diff'bar mit

$f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Dann ist $f(x) - g(x)$ Konstant.

(3) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diff'bar

Wenn $\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b) & \Rightarrow f \text{ monoton wachsend} \\ f'(x) > 0 & \text{streng monoton wachsend} \\ f'(x) \leq 0 & \Rightarrow f \text{ mon fallend} \\ f'(x) < 0 & \Rightarrow f \text{ steng mon. fallend} \end{cases}$

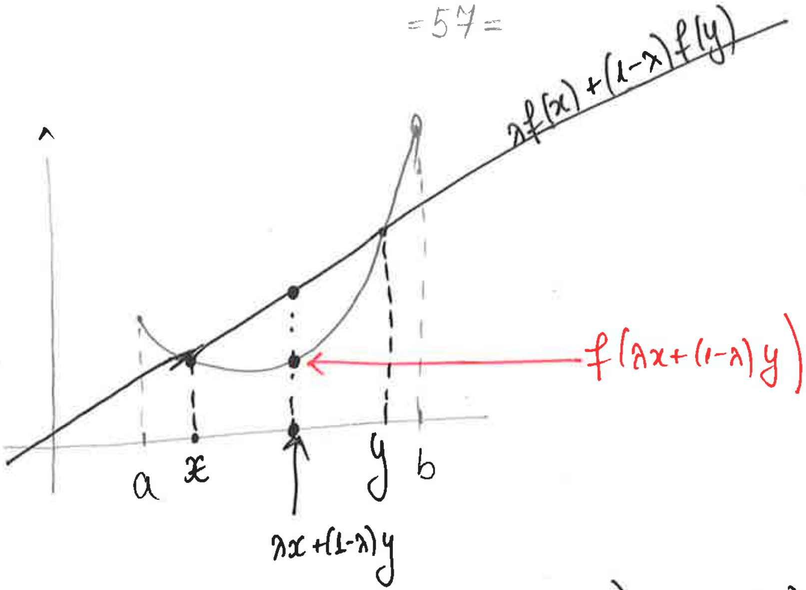
2. MWS der Diff. Rechnung (Cauchy)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b), und $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$, und $\exists$ $x_0 \in (a,b)$: $\boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}$

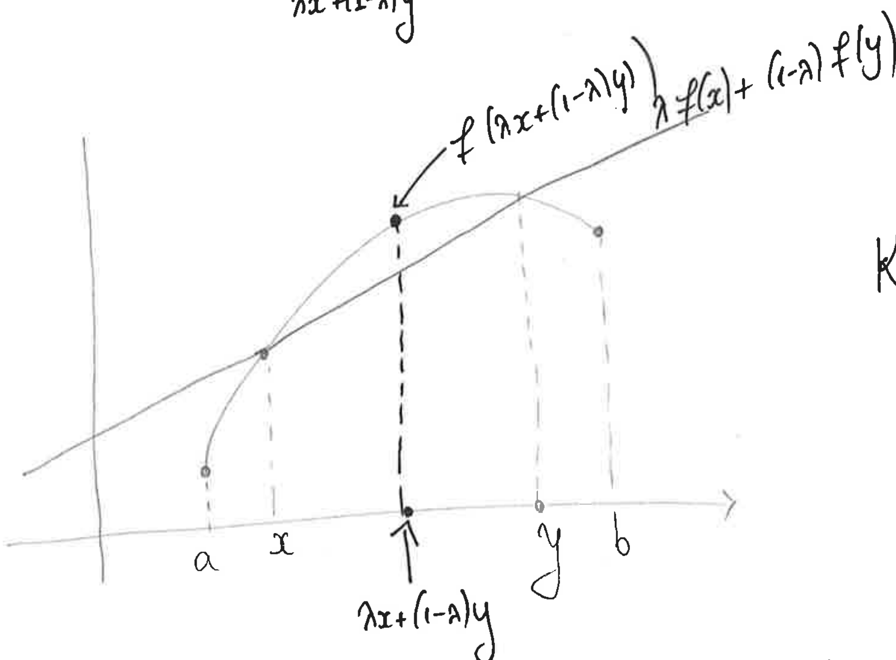
KONVEXITÄT

Def
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Konvex, wenn für alle $x, y \in [a,b]$, $\forall \lambda \in [0,1]$:
$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Konkav, $\forall x, y \in [a,b]$, $\forall \lambda \in [0,1]$
$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

[Streng Konvex mit ">" statt "≥"
Streng Konkav mit "<" stat "≤"]



Konvex



KonKav.

! Lineare Fkt (Gerade) = sowohl Konvex als auch KonKav.

Satz: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und 2-mal diff'bar auf (a,b).

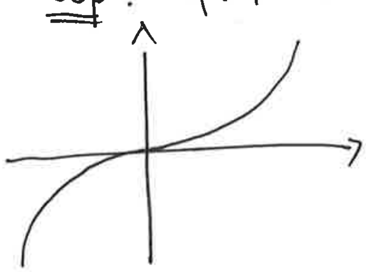
Dann (i) $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ Konvex

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng Konvex

(ii) $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ KonKav

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng KonKav.

Bsp: $f(x) = x^3$ stetig und diff. auf $\mathbb{R}$.



$f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x$

$$\begin{cases} f''(x) \geq 0, & \text{für } x \geq 0 \\ f''(x) < 0, & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ auf } (0,+\infty) \text{ Konvex} \\ \text{auf } (-\infty, 0] \text{ KonKav.} \end{array}$$

GRENZWERTBESTIMMUNG, UNBESTIMMTE AUSDRÜCKE
REGELN VON DE L'HOSPITAL

- Unbestimmte Ausdrücke

$$\left[\frac{0}{0}\right],\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right],\ [0\cdot\infty],\ [0^0],\ [\infty^0],\ [1^\infty],\ [\infty-\infty]$$

Regel von L'Hospital [Typ $\left(\frac{0}{0}\right)$ oder $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$]

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar im (a,b) und ist $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ von der Form $\left[\frac{0}{0}\right]$ bzw $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ dann ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(Fall Grenzwert existiert)

Bemerkung: $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ mit L'Hospital

$0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$ lassen sich auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückführen.

Bsp: (1) $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

(2)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

(3) Man vergewissere sich, dass die Vorraussetzungen erfüllt sind. Sonst passiert folgendes

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 0\cdot 1 = 0$$

l'Hospital ?? $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x} \neq \lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{e^x} = 1$

da nicht Typ $\frac{0}{0}$

(4) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

- $[0\cdot\infty] \to \left[\frac{\infty}{\frac{1}{0}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

  oder

  $\left[\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$$

- $[0^0] \to e^{0\cdot\ln 0} \to e^{0\cdot\infty}$

  $0\cdot\infty \to$ Umformen wie oben.

- $[1^\infty] \to e^{\infty\ln 1} \to e^{\underbrace{\infty\cdot 0}}$

- $[\infty^0] \to e^{0\cdot\ln\infty} \to e^{\underbrace{0\cdot\infty}}$

- $[\infty-\infty] \to \begin{cases}\text{Hauptnenner}\\ \text{Erweitern}\end{cases}$

Bsp: (5) $[0\cdot\infty]$ $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x \underset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} -x = 0$

(6) $[0^0]$: $\lim\limits_{x\to0} x^x \underset{0^0}{=} \lim\limits_{x\to0} e^{\overbrace{x\ln x}^{\text{Bsp}(5)\,=\,0}} = e^0 = 1$

(7) $[1^{\infty}]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} \underset{[1^{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} e^{\underbrace{3x\cdot\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}_{\infty\cdot 0}} = e^{-6}$$

$$\lim_{x\to\infty} 3x\ln\left(1-\frac{2}{x}\right) \underset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{3x}} \underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}\cdot\frac{2}{\cancel{x^2}}}{\frac{-1}{3\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-6}{1-\frac{2}{x}} = -6$$

$[\infty^0]$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} =$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad ; \lim_{x\to x_0} g(x)=0}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}$$

(8)
$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(e^{3x}-5x\right)}_{\to\infty}^{\overbrace{x^{-1}}^{\to 0}} = \lim_{x\to\infty} e^{\underset{0}{x^{-1}}\underbrace{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}_{\infty}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}} = e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}}{1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3\cdot 3e^{3x}}{3e^{3x}-5} \underset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{27\cancel{e^{3x}}}{9\cancel{e^{3x}}} = 3$$

$$= e^3$$

(9) $[\infty - \infty]$

$$\lim_{x\to 0}\left(\underset{\downarrow\,\infty}{\frac{1}{x}} - \underset{\downarrow\,\infty}{\frac{\sin x}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \circledast = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2x} = +\infty}$$

KURVENDISKUSSION

! Verhalten einer Fkt. analysieren

- ⊛ Definitionsbereich D
- ⊛ Nullstellen von f (wo schneidet f die x-Achse)
- ⊛ Stetigkeit & Diff'barkeit
- ⊛ Stationäre Punkte und Extrema
- ⊛ Wendepunkte, Krümmungsverhalten (Konkav oder Konvex : $f''(x)$ ausrechn)
- ⊛ Verhalten am Rand
- ⊛ Asymptoten

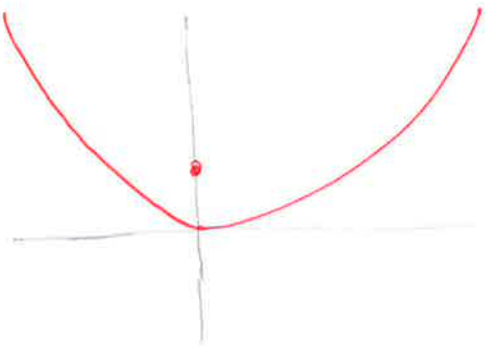
! Nullstellen : Punkte $x_0 \in D$, wo $f(x) = 0$

! Stetigkeit & Unstetigkeitsstellen

- hebbare in x_0 wenn $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- Sprungstelle: $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und
- Wesentliche Unstetigkeitsstelle: $\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$

Hebbare

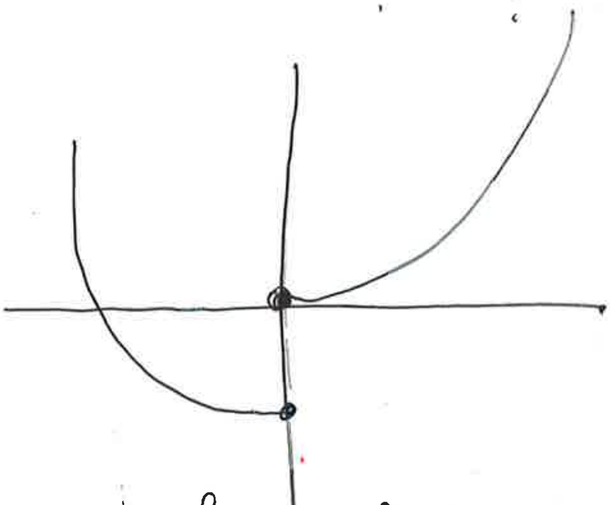
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$



Sprungstelle

: $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ x^2 - 1 & , x < 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} 0 = \lim_{x \to 0+} f \neq \lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \neq$$

$\boxed{x=0}$ Sprungstelle

Wesentliche Unstetigkeitsstelle

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ hat im

$x = 0$: $\nexists \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

Stationäre Punkte und Extrema

- $f: [a, b]$ stetig nimmt Max & Min an.
  - Max & min können auftreten
    - → am Rand in $x = a$, $x = b$
    - → in Pkt. wo f nicht diff'bar
    - → oder in Stationäre Pkt (wo $f'(x) = 0$)
  - Nicht jeder stationärer Punkt ist ein Extremwert.
  - Wie überprüft man dass $x_0 \to$ Extremwert ist , wenn $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Sei x_0 stationär $f'(x_0) = 0$

a) x_0 = lok. Min wenn

mon. wachsend → $f'(x) > 0$ für x unmittelbar rechts von x_0

mon. fallend → $f'(x) < 0$ für x unmittelbar links von x_0

x_0 = lok. Max, wenn

mon fallend → $f'(x) < 0$ für x unmittelbar rechts von x_0

mon wachsend → $f'(x) > 0$ für x —"— links

b) x_0 stationär $(f'(x_0) = 0)$ und f 2-mal diff'bar in x_0

$\boxed{x_0 = \text{Extremwert wenn } f''(x_0) \neq 0}$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \end{cases}$$

WENDEPUNKTE

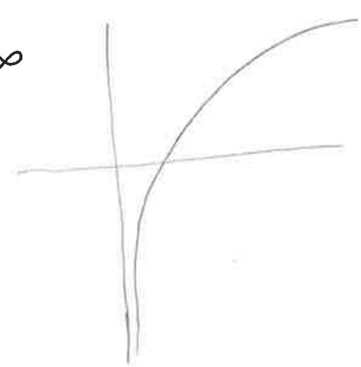
Wendepunkt: x_0, wo f die Krümmung ändert (von Konkav zu Konvex oder umgekehrt)

x_0 Wendepunkt $\Rightarrow$ $\boxed{f''(x_0) = 0}$

ASYMPTOTE

a) SENKRECHTE (VERTIKALE) in $x = x_0$ wenn

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$



Bsp: $x = 0$ Vert. Asympt für $f(x) = \ln x$

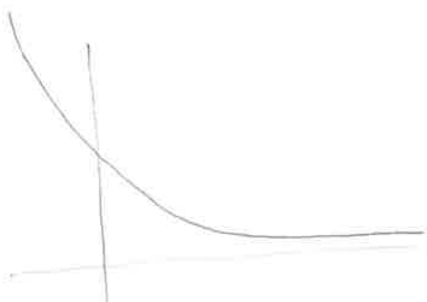
b) WAAGRECHTE (HORIZONTALE)

Wenn $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = d \Rightarrow y = d$ ist Waagrechte Asymptote für $x \to \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = d \Rightarrow y = d$ ist Waagrechte Asymp. für $x \to -\infty$

Bsp: $f(x) = e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ Waagrechte Asymp. für $x \to \infty$



c) SCHRÄGE

Berechne $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$

- Wenn k nicht existiert, $\nexists$ Schräge Asymp für $x \to \infty$
- Wenn k existiert, dann berechne

$$d := \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx\right)$$

- Wenn d existiert, dann ist $\boxed{y = kx + d}$ Asymptote für $x \to \infty$
- Wenn d nicht existiert, dann keine Schräge Asymptote.

Analog für $\boxed{x \to -\infty}$

KURVENDISKUSSION

Beispiel Prüfung MATHE A $\boxed{06.02.2018}$

Bsp: $f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{e^{x}}{x-1}, & x \geq 0 \\ \dfrac{e^{-x}}{x-1}, & x < 0 \end{cases}$

1) **Definitionsbereich** $D(f) = ?$

$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x-1}, & x < 0 \\ \dfrac{e^{x}}{x-1}, & x \geq 0, \; x \neq 1 \end{cases}$$

2) **Nullstellen**:

$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0, & x = \emptyset \\ e^{x} = 0 \Rightarrow x = \emptyset \end{cases}$

Keine Nullstellen

3) **Stetigkeit**

Auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$ stetig, da Zusammensetzung von stetige Fkt.

in $\boxed{x = 0}$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ ist stetig in $\boxed{x = 0}$

$\Rightarrow$ f stetig auf $D(f)$

4 Differentierbarkeit

f diff'bar auf $D(f) \setminus \{0\}$, da Zusammensetzung von elementare Fkt (e^x, $x-1$), die diff'bar sind.

in $\boxed{x=0}$ extra überprüfen.

$x<0$: $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x-1) - e^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{-xe^{-x}}{(x-1)^2}$$

$x>0$, $\boxed{x \neq 1}$: $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot e^x - 2e^x}{(x-1)^2}$$

In $\boxed{x=0}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f'(x) &= 0 \\ \lim_{x \to 0+} f'(x) &= \frac{0-2}{1} = -2 \end{aligned}\right\} \neq$$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ ist nicht diff'bar in } x=0}$

f diff'bar auf $D(f) \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-xe^{-x}}{(x-1)^2}, & x<0 \\[2ex] \dfrac{xe^x - 2e^x}{(x-1)^2}, & x>0 \end{cases}$$

5 Monotonie

Auf $(-\infty, 0)$: $\left.\begin{aligned} -x \cdot e^{-x} &> 0 \\ (x-1)^2 &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend

Auf $(0,+\infty)\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}\begin{cases}\geq 0, & x\geq 2 \Rightarrow \text{mon wachsend}\\ <0, & x<2 \Rightarrow \text{mon fallend.}\end{cases}$$

<u>f ist</u> ~~auf~~ $\begin{cases}(-\infty,0) \text{ streng mon. wachsend} & f'(x)>0\\ (0,2)\setminus\{1\}, \text{ mon fallend} & f'(x)<0\\ [2,+\infty) \text{ mon wachsend.}\end{cases}$

$\boxed{6}$ Extrema

- Rand gibt es nicht
- Stationäre Punkte : $f'(x)=0$

<u>$x<0$</u> : $f'(x)=0 \Rightarrow \underbrace{-x\cdot e^{-x}}_{\neq 0}=0$, keine Nullstellen

<u>$x>0$</u> : $\dfrac{xe^x-2\cdot e^x}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow e^x(x-2)=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{x=2}$ <u>Stationär</u>

Für $\begin{cases}\underline{x<2}\\ x>2\end{cases}$: $\begin{cases}f'(x)<0 & \text{- fallend}\\ f'(x)>0 & \rightarrow \text{wachsend}\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x=2}$ <u>lok Minimum</u>

- Punkte wo f nicht diff'bar : $\boxed{x=0}$
  $\Rightarrow$ in $\boxed{x=0}$ wechselt f' das Vorzeichnen
  (von wachsend $f'>0$ $\rightarrow$ fallend $f'<0$)
  $\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$ lokales Maximum

<u>Max & Min</u> | <u>$x=0$</u> lok Max
| $x=2$ lok Min

7 Asymptoten

Vertikale: in $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \boxed{x = 1} \quad \text{Vertikale (Senkrechte Asymptote)}$$

Waagrechte

$x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

$\Rightarrow$ keine Waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$

$x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x-1} = -\infty$

$\Rightarrow$ keine Waagrechte Asymptote für $x \to +\infty$

Schräge

$x \to +\infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x(x-1)} = +\infty$

$x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x(x-1)} = +\infty$

$\Rightarrow$ Keine schräge Asymptoten.

8 KRÜMMUNGSVERHALTEN : KONKAV & KONVEX

$f''(x) = ?$

$x < 0$: $f''(x) = \left(\frac{-x e^{-x}}{(x-1)^2}\right)' = \frac{\left(-e^{-x} + x e^{-x}\right)(x-1)^{\cancel{2}} + x e^{-x} \cdot 2 \cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$

$= \frac{x(x-1)e^{-x} - (x-1)e^{-x} + 2x e^{-x}}{(x-1)^3} = \frac{e^{-x}\left(x^2 - \cancel{x} - \cancel{x} + 1 + \cancel{2x}\right)}{(x-1)^3}$

$= \quad x$

$$f''(x) = \frac{\overbrace{(x^2+1)}^{>0}\,\overbrace{e^{-x}}^{>0}}{\underbrace{(x-1)^3}_{<0}} \quad , \text{für } \underline{x < 0}$$

$$\boxed{f''(x) < 0 \ , \forall x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \text{Auf } (-\infty, 0) : \underline{\text{Konkav}}}$$

Für $\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}}$ $\quad f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

$$f''(x) = \frac{\left(e^x(x-2) + e^x\right)(x-1)^{\cancel{2}} - e^x(x-2)\cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{e^x(x-1)^2 - 2e^x(x-2)}{(x-1)^3} = \frac{e^x\left(x^2-2x+1-2x+4\right)}{(x-1)^3} =$$

$$f''(x) = \frac{\overbrace{e^x}^{>0}\left(\overbrace{x^2-4x+5}^{>0}\right)}{\underbrace{(x-1)^3}_{}}$$

$$\underbrace{x^2-4x+5}_{>0} = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm 2i$$

$$\underline{x > 0} \quad f''(x) : \begin{cases} < 0 & ; \ x < 1 \Rightarrow \text{Konkav} \\ > 0 & \ \ x > 1 \Rightarrow \text{Konvex} \end{cases}$$