

Δ: VEKTOR- UND MATRIZENRECHNUNG

• Zusammenfassung

- $P \in \mathbb{R}^n$: Punkt im $\mathbb{R}^n$: $(p_1, p_2, \dots, p_n)$: n -tupel.
- Vektor : Translation (Verschiebung) der Punkte eines Raumes.

→ Zeilenvektor : $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

→ Spaltenvektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

→ Transposition : $\vec{a}^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$; $\vec{v}^t = (v_1, \dots, v_n)$

→ Vektoraddition : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

- Vektorraum : $(V, +, \cdot)$
 $\downarrow$
 add
 $\uparrow$ mult. mit Skalaren.

- Unterraum :

Lineare Kombination von Vektoren $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(k)} \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$: $\left| \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}^{(1)} + \lambda_2 \vec{v}^{(2)} + \dots + \lambda_k \vec{v}^{(k)} \right|$

→ Menge aller linear Komb von $\vec{v}^{(1)} \dots, \vec{v}^{(k)}$ = der von den $\vec{v}^{(1)} \dots, \vec{v}^{(k)}$ aufgespannte Unterraum (lineare Hülle)
 $\downarrow$
 Erzeugendensystem.

- Lineare Abhängigkeit & Unabhängigkeit

→ $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(k)}$ = lin. abhängig , wenn $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ (nicht alle 0) sodass $\lambda_1 \vec{v}^{(1)} + \dots + \lambda_k \vec{v}^{(k)} = \vec{0}$

→ Wenn $\lambda_1 \neq 0$: $\vec{v}^{(1)} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}^{(2)} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \vec{v}^{(k)}$

→ Linear unabhängig:

Aus $\lambda_1 \vec{v}^{(1)} + \lambda_2 \vec{v}^{(2)} + \dots + \lambda_k \vec{v}^{(k)} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

→ Basis und dimension

V - Vektorraum, $U \subseteq V$, U von $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(k)}$ aufgespannt und $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(k)}$ unabhängig $\Rightarrow \{\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(k)}\}$ Basis von U und $k = \text{Dimension von } U$

→ Skalarprodukt

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \in \mathbb{R}$

→ Norm

• $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

• $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

→ Orthogonalsystem

$\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(k)}$: Grth. syst wenn

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \vec{v}^{(i)} \neq \vec{0}, \forall i \\ \bullet \langle \vec{v}^{(i)}, \vec{v}^{(j)} \rangle = 0, \forall i \neq j \end{array} \right.$

Bem: Alle vekt. eine. Orthogonalsysteme sind linear unabhängig; bilden ein Orthogonalbasis des von ihnen aufgesp. Unterraum; $\|\vec{v}^{(i)}\| = 1 \Rightarrow$ Orthonormalbasis von U .

→ Orthogonalprojektion

$\vec{x} = \lambda \vec{y} + \vec{z}$ mit $\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$
 $\lambda, \vec{z} = ? \quad \lambda = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}; \quad \vec{z} = \vec{x} - \lambda \vec{y}$
 $\lambda \vec{y} = \text{Orthogonalprojektion von } \vec{x} \text{ auf } \text{Span}(\vec{y})$



Orthogonalisierungsverfahren GRAM-SCHMIDT

Verfahren

! Gegeben: Basis von Vektoren $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ eines Vektorraumes U
 $\dim U = k$

d.h. $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ lin. unabhängig

Aus $\lambda_1 \vec{x}^{(1)} + \dots + \lambda_k \vec{x}^{(k)} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$

$\forall \vec{u} \in U$

$\vec{u} = \lambda_1 \vec{x}^{(1)} + \dots + \lambda_k \vec{x}^{(k)}$

! Gesucht: Eine Orthonormalbasis von U : $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(k)}$

d.h. $\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(k)}$ stehen orthogonal aufeinander
 (Winkel von 90°) und haben Länge 1: $\|\vec{y}^{(i)}\| = 1$

Basis $\{\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}\}$ von U $\xrightarrow[\text{SCHMIDT}]{\text{GRAM-}}$ ONB von U ★

Gram-Schmidt Verfahren

Schritt 1:

- Wähle einen Vektor aus $\{\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}\}$, egal welchen

Normiere $\vec{x}^{(1)}$: d.h. bringe $\vec{x}^{(1)}$ zu Länge 1:

$$\vec{y}^{(1)} = \frac{\vec{x}^{(1)}}{\|\vec{x}^{(1)}\|}$$

$$\|\vec{x}^{(1)}\| = \sqrt{(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2 + \dots + (x_n^1)^2}$$

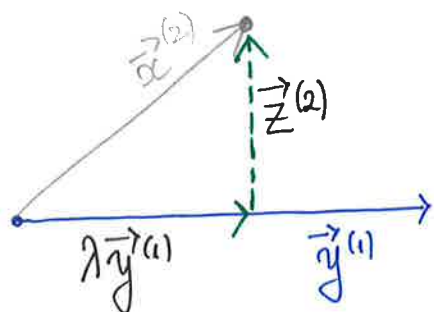
$$= \sqrt{\langle \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(1)} \rangle}$$

Schritt 2

- Wähle einen weiteren Vektor aus $\{\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}\}$, $\neq \vec{x}^{(1)}$
- machen weiter mit $\vec{x}^{(2)}$: zerlegen $\vec{x}^{(2)}$ in eine Komponente in Richtung $\vec{y}^{(1)}$ und in eine dazu

= 4 =

senkrechte Richtung.



[Erinnerung
 $\vec{z}^{(2)} = \vec{x}^{(2)} - \lambda \vec{y}^{(1)}$
 ↓ ↓
 bekannt bekannt

$\lambda \rightarrow$ berechnen

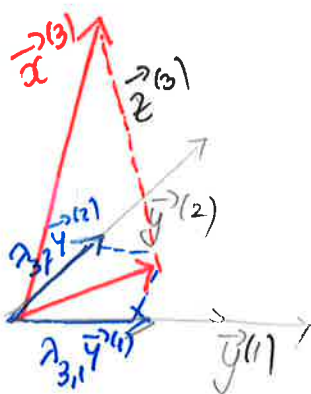
$$\lambda = \frac{\langle \vec{x}^{(2)}, \vec{y}^{(1)} \rangle}{\langle \vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(1)} \rangle} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \vec{z}^{(2)} = \vec{x}^{(2)} - \vec{y}^{(1)} \quad \langle \vec{x}^{(2)}, \vec{y}^{(1)} \rangle$$

• Normiere $\vec{z}^{(2)}$: $\vec{y}^{(2)} = \frac{\vec{z}^{(2)}}{\|\vec{z}^{(2)}\|}$

Schritt 3

→ weiter machen mit $\vec{x}^{(3)}$, ... suche Vektor $\vec{z}^{(3)}$, der senkrecht auf $\vec{y}^{(1)}$ und $\vec{y}^{(2)}$ ist. (3dim. vorstellen)



• projiziere $\vec{x}^{(3)}$ auf dem span $\{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}\}$

$$\vec{z}^{(3)} = \vec{x}^{(3)} - \lambda_{3,1} \vec{y}^{(1)} - \lambda_{3,2} \vec{y}^{(2)}$$

$$\lambda_{3,1} = \langle \vec{x}^{(3)}, \vec{y}^{(1)} \rangle$$

$$\lambda_{3,2} = \langle \vec{x}^{(3)}, \vec{y}^{(2)} \rangle$$

• Normiere $\vec{z}^{(3)} \Rightarrow \vec{y}^{(3)} = \frac{\vec{z}^{(3)}}{\|\vec{z}^{(3)}\|}$

Allgemeiner Schritt:

→ zerlege $\vec{x}^{(i)}$ in Richtung $\vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(i-1)}$ und in eine dazu senkrechte Komponente $\vec{z}^{(i)}$. Normiere $\vec{z}^{(i)}$ auf die Länge 1 $\Rightarrow \vec{y}^{(i)}$

$$\vec{z}^{(i)} = \vec{x}^{(i)} - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} \vec{y}^{(j)} \quad \text{mit} \quad \lambda_{i,j} = \langle \vec{x}^{(i)}, \vec{y}^{(j)} \rangle.$$

Normieren: $\vec{y}^{(i)} = \frac{\vec{z}^{(i)}}{\|\vec{z}^{(i)}\|}$

Satz: Ist $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(k)}$ eine Orthonormalbasis von U , und $\vec{x}$ ein beliebiger Vektor von U , dann besitzt $\vec{x}$ eine Darstellung

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{x}^{(i)} \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \langle \vec{x}, \vec{x}^{(i)} \rangle$$

Fourierkoeff.

Es gilt: $\vec{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{x}^{(i)}$ und $\vec{y} = \sum_{i=1}^k \mu_i \vec{x}^{(i)}$

$$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mu_i$$

Bsp: Man finde zu $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ eine ONB

• Schritt 1: Normierung von $\vec{x}^{(1)}$

$$\vec{y}^{(1)} = \frac{\vec{x}^{(1)}}{\|\vec{x}^{(1)}\|}$$

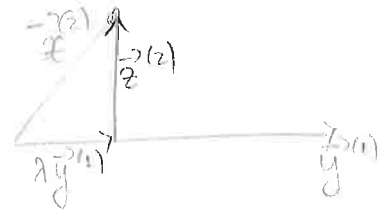
$$\|\vec{x}^{(1)}\| = \sqrt{14}$$

$$\vec{y}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Schritt 2: wähle $\vec{x}^{(2)}$: Zerlegung in

$$\lambda \vec{y}^{(1)} + \vec{z}^{(2)} = \vec{x}^{(2)}$$

$$\Rightarrow \vec{z}^{(2)} = \vec{x}^{(2)} - \lambda \vec{y}^{(1)}$$



$$\lambda = \langle \vec{x}^{(2)}, \vec{y}^{(1)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 8+3+3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 14 = \sqrt{14} \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{14}}$$

$$\vec{z}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normiere

$$\vec{z}^{(2)} \Rightarrow \vec{y}^{(2)} = \frac{\vec{z}^{(2)}}{\|\vec{z}^{(2)}\|}$$

$$\|\vec{z}^{(2)}\| = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{y}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

= 6 =

• Schritt 3: Wähle $\vec{x}^{(3)}$

$$\vec{z}^{(3)} = \vec{x}^{(3)} - \lambda_{3,1} \vec{y}^{(1)} - \lambda_{3,2} \vec{y}^{(2)}$$

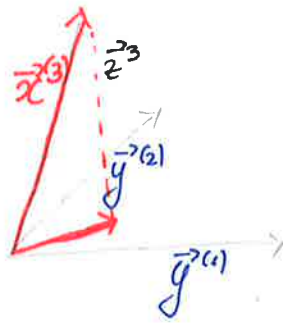
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{\langle \vec{x}^{(3)}, \vec{y}^{(1)} \rangle}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\langle \vec{x}^{(3)}, \vec{y}^{(2)} \rangle}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{z}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ; \|\vec{z}^{(3)}\| = \sqrt{42}$$

Normiere $\vec{z}^{(3)}$:

$$\vec{y}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$



$$\lambda_{3,1} = \langle \vec{x}^{(3)}, \vec{y}^{(1)} \rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 14 = \sqrt{14}$$

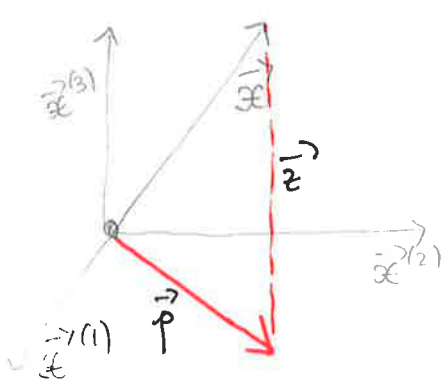
$$\lambda_{3,2} = \langle \vec{x}^{(3)}, \vec{y}^{(2)} \rangle = \sqrt{3}$$

Ergebnis: ONB

$$\vec{y}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{y}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \vec{y}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Orthogonalprojektion auf einen Teilraum

- Gegeben: Vektor $\vec{x}$, Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$
- Gesucht: $\vec{x}$ als Summe $\vec{z}$ und $\vec{p}$ darstellen mit $\vec{p} \in U$, $\vec{z}$ orthogonal zu U ($\langle \vec{z}, \vec{u} \rangle = 0, \forall \vec{u} \in U$)



Lösung: Suche ONB $\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots, \vec{x}^{(k)}\}$ von U .

$$\begin{cases} \vec{p} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{x}^{(i)} \text{ mit} \\ \lambda_i = \langle \vec{x}, \vec{x}^{(i)} \rangle \end{cases}$$

Fourier Koeff. von $\vec{x}$

! Dann ist $\vec{z} = \vec{x} - \vec{p}$ zu U orthogonal, $\vec{p}$ = **Orthogonalprojektion von $\vec{x}$ auf U .**

Bsp: ONB: $\{\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \vec{y}^{(3)}\} \text{ span } U$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Orthogonalprojektion von $\vec{x}$ auf $U = ?$

$$\vec{p} = \lambda_1 \vec{y}^{(1)} + \lambda_2 \vec{y}^{(2)} + \lambda_3 \vec{y}^{(3)}$$

$$\lambda_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 4 \quad \lambda_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\lambda_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{42}} \Rightarrow \vec{p} = \frac{4}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Darstellung von Geraden und Ebenen

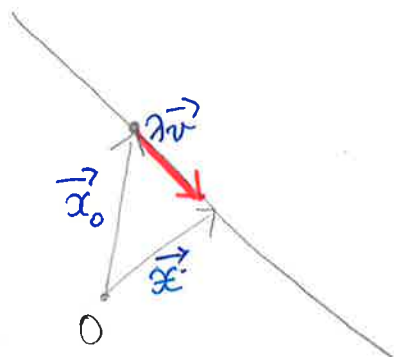
A. Parameterdarstellung

Dimension $n \geq 2$:

Gegeben: $\begin{cases} \text{Ortsvektor } \vec{x}_0 & (\text{Endpunkt von } \vec{x}_0) \\ \text{Richtungsvektor } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$

Gerade Darstellung durch $\vec{x}_0$ und Richtungsvektor $\vec{v}$.

$$(1) \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{v} \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$



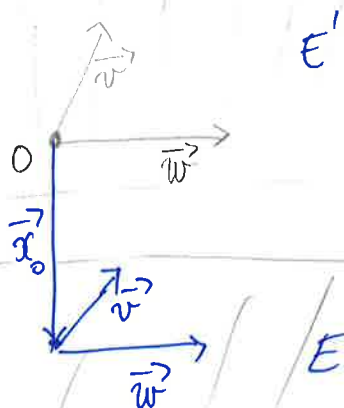
↓
Allgemeiner Punkt der Geraden,
 $\vec{x}_0$: Kann man jeden beliebigen Punkt der Geraden einsetzen.

$\vec{v}$: Eindeutig bis auf Multiplikation.

Dimension $n \geq 3$ Ebene Darstellung: durch Ortsvektor $\vec{x}_0$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Allgemeiner Punkt der Ebene:

$$(E): \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \quad ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

E und E' sind parallel



= g =

B. Darstellung durch Gleichungen

Hyperebene in $\mathbb{R}^n$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = c}$$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = c$$

,wobei $\left. \begin{matrix} \vec{N} \in \mathbb{R}^n \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$ gegeben.

$n=2$ Hyperebene in $\mathbb{R}^2$ = Gerade

$$\vec{N} = (a, b)^t \text{ und } c \in \mathbb{R}, \vec{x} = (x, y)^t$$

Gleichung: $ax + by = c$ Gerade in $\mathbb{R}^2$

$\vec{N}$ steht normal auf die Gerade, d.h. durch

$\vec{v} = (-b, a)$ ist der Richtungsvektor der Gerade



$n=3$ Hyperebene in $\mathbb{R}^3$ = Ebene

Vektor $\vec{N}$ steht normal auf die Ebene.

Ebene in Parameterdarstellung durch unabhängige Richtungsvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ und $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^t$ gegeben.

Äußere Produkt von $\vec{v}$ und $\vec{w}$

(Kreuzprodukt)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

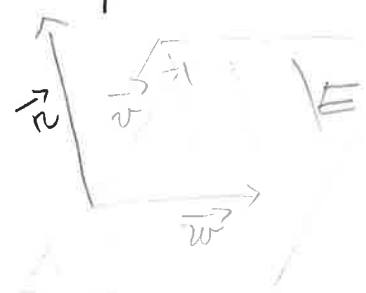
$$\vec{N} = \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}$$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = c$$

Gerade in Dim $n=3$ = Schnitt 2 Ebenen (also durch

2 Gleichungen gegeben) $\begin{cases} \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = c & (E_1) \\ \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle = d & (E_2) \end{cases} n=6$

$\vec{a}, \vec{b}$ linear unabhängig. Richtungsvektor von (G) $\vec{a} \times \vec{b}$



= 10 =

Ebene: $ax + by + cz = d$; $d \in \mathbb{R}$

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

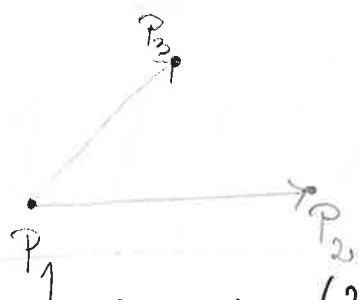
Gerade durch 2 Punkte

(x_0, y_0) und (x_1, y_1)

$$(G) : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Bsp (i) Parameterdarstellung der Ebene (E) durch 3 Punkten?

$$P_1 = (2, 1, -3) \quad ; \quad P_2 = (-1, 3, -4) \quad ; \quad P_3 = (1, 2, 3)$$



P_1 = Ortsvektor

$$\text{Richtungsvektoren} \begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_3} = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \vec{u} = \overrightarrow{P_1 P_2} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(E) : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

! Durch vertauschen von P_1, P_2, P_3 erhält man andere Darstellungen, die jedoch die gleiche Ebene beschreiben.

(ii) Normalvektor zu (E) = ?

$$\vec{N} \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Gleichungsdarstellung = ? $\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = c \in \mathbb{R}$

• linke Seite : $\boxed{-13x - 19y + z}$

• Wie bekommt man $c = ?$ P_1 erfüllt die Gleichung

$$= 11 =$$

$$\Rightarrow -13 \cdot 2 - 19 \cdot 1 - 3 = c \Rightarrow \boxed{c = -45}$$

$$\Rightarrow (E): -13x - 19y + z = -45$$

Bsp: Gleichung der Ebene durch den Punkt $P = (3, 2, 1)$ die Normal zu $(2, -3, 4)^T$ ist = ?

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = d$$

$$(E): 2x - 3y + 4z = d$$

$$d = ? : P \in E \Rightarrow$$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4 = d = 4 \Rightarrow \boxed{d = 4} \Rightarrow (E): 2x - 3y + 4z = 4$$

Bsp Ebene: $(E): 2x - 3z = 4$

Parameterdarstellung von $E = ?$

Lösen des LGL: 1 Gleichung, 3 Unbekannte

• Setzen $y = \lambda$ und $z = \mu \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(3\mu + 4) \Rightarrow x = \frac{3}{2}\mu + 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 0 \cdot \lambda + \frac{3}{2}\mu \\ y = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu \\ z = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren.

MATRIZEN

Matrix : eine $(m \times n)$ -Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema, das aus $m \cdot n$ Zahlen (Elemente oder Einträge) besteht, die in m Zeilen (Zeilenvektoren) und n Spalten (Spaltenvektoren) angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$, a_{ij} das Element in der i -te Zeile und in der j -te Spalte.
 ↙
 Zuerst Zeilenindex, dann Spaltenindex

• $\begin{cases} m & = \text{Zeilenzahl} \\ n & = \text{Spaltenzahl} \end{cases}$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist ein 3×2 Matrix aus 3 Zeilen und 2 Spalten; $a_{12} = 1$
 $a_{31} = 0$

1. Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Zeilenvektor $(-1, 0)$

! Wann sind 2 Matrizen A und B gleich?

- gleiche Zeilenanzahl
- gleiche Spaltenanzahl
- alle Elemente gleich: $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Spezielle Arten von Matrizen: A

(i) Alle Elemente in $A = 0 \Rightarrow$ Nullmatrix O

(ii) $m = n$ und $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
 $\rightarrow$ Diagonalmatrix Δ

(iii) Einheitsmatrix I : $m = n$; $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$
 $a_{ii} = 1, \forall i$; $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

Rechnen mit Matrizen

★ Sind $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ 2 $(m \times n)$ -Matrizen, so gilt

(1) Gleichheit : $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$

(2) Multiplikation mit Skalar : $\forall c \in \mathbb{R}$ (elementweise)
 $cA = (ca_{ij})_{i,j}$

(3) Addition : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$; $i = 1, \dots, m$
 $\rightarrow$ elementweise addition ; $j = 1, \dots, n$

(4) Transponieren : Vertauschen von Zeilen und Spalten