

TAYLORFORMEL

Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$ -diff'bar, $x_0 \in [a, b]$, $x_0 + h \in [a, b]$.
Dann $\exists \delta \in (0, 1)$:

$$(*) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta \cdot h)$$

In $(*)$: $x = x_0 + h \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x - x_0))$$

$$\boxed{\delta \in (0, 1)}$$

Für $x_0 = 0 \Rightarrow$ Formel von Mac Laurin

Satz (Formel von Mac Laurin)

sind $x, 0 \in [a, b]$, dann

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\delta x)}_{R_{n+1}}$$

$\delta \in (0, 1)$, δ hängt von x ab.

$R_{n+1} = \text{Restglied}$

Anwendung: Untersuchung von stationären Punkten

(d.h. $f'(x_0) = 0$)

- Sei f n mal stetig diff'bar in $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ und $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Dann Taylorformel

wird

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \delta h)$$

Fall 1: n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Für kleines $|h|$ ist auch $f^{(n)}(x_0 + \delta h) > 0$ (Stetigkeit) und $h^n > 0 \Rightarrow$

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \delta h) > 0 \Rightarrow f(x_0 + h) > f(x_0) \Rightarrow \boxed{x_0 = \text{el. Min}}$$

$$= 1$$

Fall 2 : $n \geq 2$ gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ Für klein $|h|$

$$f^{(n)}(x_0 + \delta h) < 0 ; h^n > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0 + \delta h)}{n!} \cdot \frac{h^n}{n!} < 0 \Rightarrow f(x_0 + h) < f(x_0) \Rightarrow$$

$x_0 = \text{rel. Max (lok. Max)}$

Fall 3 : $n \geq 3$ ungerade $\Rightarrow$

$$h^n \text{ alternierend } \left(\begin{array}{l} h > 0 \Rightarrow h^n > 0 \\ h < 0 \Rightarrow h^n < 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$f(x_0 + h) - f(x_0) \rightarrow$ pos und neg. Vorzeichen

$x_0 = \text{Wendepunkt}$

Bsp.

$f(x) = x^n$ in $x_0 = 0$; f n -mal stetig diff'bar.

$$f'(x) = n x^{n-1} ; f'(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$f''(x) = n(n-1) x^{n-2}$$

$$\boxed{f^{(n)}(x) = n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} f^{(n)}(0) > 0 \\ n \rightarrow \text{gerade} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow \underline{\text{Min}}$$

n -ungerade $\Rightarrow$ Wendepunkt

TAYLORREIHEN

! $f \rightarrow$ beliebig oft diff'bar ($\sin x, \cos x, e^x, \ln x, \dots$)
in Taylorformel beliebig hohe Ableitungen einsetzen)

$\Rightarrow$ eine unendliche Reihe : TAYLORREIHE von $f(x)$

um Entwicklungspunkt x_0 : $T_{f, x_0}(x)$

$$T_{f, x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow T_{f, 0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Frage: Wann ist $T_{f, x_0}(x) = f(x)$, b.z.w. für welche x ? Wann konvergiert die Taylorreihe von f gegen f ?

Wenn Restglied $R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$
für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert! ($0 \leq \theta \leq 1$)

Bsp: $f(x) = e^x$

Taylorreihe $T_{f, 0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

Restglied $|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0$

und $\boxed{f(x) = T_{f, 0}(x)}$

Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow$ Taylorreihe konv.

Bsp: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$f^{(n)}(0) = 0, \forall n \Rightarrow T_{f, 0}(x) = 0 + 0 \cdot x + \dots = 0 \rightarrow$$

$T_{f, 0}$ liefert nicht die Ausgangsfunktion.

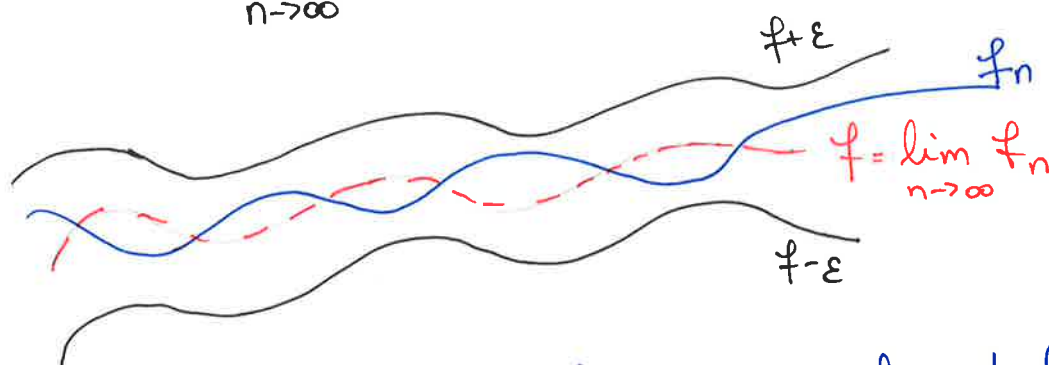
In dem Bsp, kann man das absolute min. der Fkt $f(x)$ im $x=0$ nicht durch differenzieren gefunden werden, obwohl f im $x=0$, beliebig oft diff'bar ist.

FOLGEN UND REIHEN VON FKT

Def. $I \rightarrow$ Intervall, $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ ($n=1,2,\dots$) eine Folge von Funktionen:

(a) Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ Konvergiert Punktweise gegen f (auf I)
wenn $\forall x \in I: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

(b) Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ Konvergiert gleichmäßig gegen f ,
wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, wo $M_n = \sup \{ |f_n(x) - f(x)|, x \in I \}$



Gleichmäßige Konv von f_n gegen f : der Graph von f_n bleibt in ein ϵ -Streifen um f .

! Gleichmäßige Konv $\Rightarrow$ Punktweise Konv

Bsp: (1) Sei $f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}$

f_n ist Punktweise und Gleichmäßig Konv gegen $f=0$

Punktweise: x : fest

$$0 < \frac{n}{n^2 + x^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Gleichmäßige:

$$M_n = \sup_x \{ |f_n(x) - 0| \} = \sup_x \left\{ \frac{n}{n^2 + x^2} \right\} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 > 0 \Rightarrow n^2 + x^2 > n^2 \Rightarrow \frac{n}{n^2 + x^2} < \frac{n}{n^2} \end{array} \right|$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow 0$ auch gleichmäßig.

Bsp:

$$f_n(x) := \frac{1}{n} [nx]$$

$[nx]$ = die größte ganze Zahl, $\leq nx$

$$[nx] \leq nx \leq [nx] + 1 \quad \text{und} \quad nx$$

$$\text{Da } \frac{1}{n} [nx] \leq \frac{1}{n} nx \leq \frac{1}{n} ([nx] + 1) \Rightarrow$$

$$f_n(x) \leq x \leq f_n(x) + \frac{1}{n} \quad | - f_n(x)$$

$$0 \leq x - f_n(x) \leq \frac{1}{n}$$

$$0 \leq M_n = \sup_x \{ |f_n(x) - x| \} \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \quad \text{gleichmäßig}$$

Bsp: $f_n(x) = x^n$ konv. punkweise auf $[0, 1]$, nicht gleichmäßig.

Def: Sei $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ Folge von Fkt. auf I . Die Reihe von Fkt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ heißt punkweise, bzw. gleichmäßig konvergent gegen $f(x)$ auf I , wenn die Folge der Partialsummen $S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

auf I punktweise, bzw. gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Satz [KRITERIUM VON WEIERSTRASS] (* konvergente Majorante)

Wenn es eine Folge $(M_n)_n$ von positiver reeller Zahlen gibt,

sodass $|f_n(x)| < M_n, \forall x \in I$ und $\sum M_n < \infty$ so

konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf I

Bsp: $f_n(x) = \frac{\sin((-1)^n x)}{n^3}$ auf $I = \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin((-1)^n x)|}{n^3} \leq \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{M_n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konvergent} \Rightarrow \text{(Weierstrass)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig konvergent.

Satz: $\left. \begin{array}{l} f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ gleichmäßig} \\ f_n \rightarrow \text{stetig} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ auch stetig auf } I$

POTENZREIHEN

! Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

- $(a_n)_n \rightarrow$ Folge reeller Zahlen, Koeffizienten
- $x_0 \in \mathbb{R}$

! Potenzreihe = Reihe von Funktionen

! Konvergenzbereich: (M) einer Potenzreihe ist die Menge aller Zahlen, die man für x einsetzen kann, so dass die entstehende numerische Reihe konvergiert

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ konvergiert}\}$$

! Konvergenzradius (R)

Für den Konvergenzbereich, bestehen innerhalb von $\mathbb{R}$ nur folgende drei Möglichkeiten:

- Die Reihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt x_0 .
- Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Die Reihe konvergiert für alle x aus einem offenen Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ und höchstens in den beiden Randpunkten $x_0 - R, x_0 + R$ (entweder in beiden Randpkt. oder genau in 1, oder in keinem)

R heißt Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

- (a) $R=0$; (b) $R=\infty$; (c) $0 < R < \infty$

Bsp:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x-0)^n \quad \text{Konvergiert nur für } |x| < 1 \Rightarrow$$

$$M = (-1, 1) = (x_0 - 1, x_0 + 1) \underset{R}{=} \boxed{R=1}$$

Satz: Für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit dem Konvergenzradius R , gilt:

(1) $R=0 \Leftrightarrow$ Die Reihe konvergiert nur für $x=x_0$.

(2) Ist $R>0$, und $0 < \rho < R$, dann konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$

absolut und gleichmäßig auf $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$

(3) Die Reihe divergiert für $\forall x$ mit $|x-x_0| > R$.

Satz: Jede Potenzreihe stellt in ihrem Konvergenzintervall eine stetige Fkt. dar.

? Wie berechnet man Konvergenzradius?

Satz von Cauchy-Hadamard

Falls $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in [0, +\infty]$ existiert, so hat die

Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ den Konvergenzradius $R = \frac{1}{L}$

$\left[\frac{1}{\infty} = 0 \text{ und } \frac{1}{0} = \infty \text{ zu interpretieren} \right]$

R könnte auch durch $R = \frac{1}{L}$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

bestimmt werden.

Differentiation von Potenzreihen

Satz: Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Fkt. ist im Inneren des Konv. intervals $(x_0 - R, x_0 + R)$ ($R > 0$) beliebig oft diff'bar. Die Ableitung erhält man durch gliedweise Differentiation.

BEISPIELE:

(1) Exponentialfunktion : $f(x) = e^x$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-0)^n}{n!} \underbrace{f^{(n)}(0)}_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

$$(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

Konvergenzbereich: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow$

$$R = \frac{1}{L} = \infty \Rightarrow$$

$$M = \mathbb{R}$$

(2) $f(x) = \ln(1+x)$ Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$; a_0 = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} ; f'(0) = 1 ; a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} ; f''(0) = -1 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = (-1) \cdot \frac{1}{2!}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} ; f'''(0) = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$T_{f,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots =$$

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n+1}}_{a_n} x^{n+1}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

$\Rightarrow M = (-1, 1) \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für $x \in (-1, 1)$ absolut.

Randpunkte extra zu untersuchen

$x=1$: $T_{f,0}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ Konvergent, (alternierende

Reihe, mit $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|$ mon. fallend $\Rightarrow$ (Leibniz Kriterium Konvergent).

$x=-1$: $T_{f,0}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$

harmonische Reihe
divergent

$f(x) = \ln(1+x) = T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ Konvergent für

$x \in M = (-1, 1]$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow T'_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)'$

$f(x) = \ln(1+x)$ und $T_f(x)$: stetig in $(-1, 1]$

Geometrische Reihe

= 80 =

(3) Z.z Für $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Taylorreihe um $x=0$: $T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$

a_0 : $f(0) = 1$ $a_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad ; \quad f'(0) = \frac{1}{1^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{1}{1!} = 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad ; \quad f''(0) = 2 = 2! \quad ; \quad a_2 = \frac{2!}{2!} = 1$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad ; \quad f^{(n)}(0) = n! \quad ; \quad a_n = 1$$

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Konvergenzradius: $a_n = 1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

$$\Rightarrow \underline{R=1} \Rightarrow$$

$$T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{Konvergent in } (-1, 1)$$

in $x = \pm 1$ divergent.

Für $x \in (-1, 1)$

ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$(4) \quad f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} x^n \stackrel{=81=}{=} \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{-2x}{3} \right)^n}_z$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x}{3}} = \frac{1}{3+2x}$$

$$\text{für } |z| < 1 \Rightarrow \left| \frac{-2x}{3} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$f(x) := \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} x^n = \frac{1}{3+2x} \quad \text{für } |x| < \frac{3}{2}$$