$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A : $(m \times n)$ Matrix $\qquad A^T$: $(n \times m)$ - Matrix

- $(A+B)^T = A^T + B^T$

Anwendungen:

- Lineare Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$
- Systeme von Differentialgleichungen.
- Zufalls prozesse

(5) Matrizenmultiplikation (Seite ...)

LINEARE ABBILDUNGEN

Def. V, W zwei Vektorräume. Eine Abbildung (Fkt) $f: V \longrightarrow W$ heißt LINEAR: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$:

$$\begin{cases} f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \\ f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \end{cases}$$

Anders formuliert: $f: V \to W$ ist genau dann linear wenn für alle $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)} \in V$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k \in \mathbb{R}$, gilt

$$f(\lambda_1 \vec{x}^{(1)} + \lambda_2 \vec{x}^{(2)} + \ldots + \lambda_k \vec{x}^{(k)}) = \lambda_1 f(\vec{x}^{(1)}) + \ldots + \lambda_k f(\vec{x}^{(k)})$$

! Es gilt: $f(\vec{0}) = \vec{0}$

Beispiele:

(Skript D-21)

- $f: V \to V$ (V = Vektorraum) ; $f(\vec{x}) = \vec{0}$
  $f(\vec{x}) = \vec{x}$
- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$, fixes $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$
- Projektionen
- Drehungen.

Satz: Ist A eine $(m \times n)$-Matrix, dann ist die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Spaltenvektoren), definiert durch $\boxed{f(\vec{x}) = A\vec{x} \text{ linear}}$ $x \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Was ist } A\vec{x}}$ $= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & \cdots a_{2n}x_n \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & \cdots a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{a}_m, \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$, wobei $\vec{a}_i$ – i-te Zeilen Vektor

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(\vec{x}) = A\vec{x}$
$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$; $\boxed{f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}}$

Ist f linear:

- Additivität: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$

$f(\vec{x} + \vec{y}) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 \\ -(x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$

$= f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

- <u>Mult. mit Skalar</u>:

$$f(\lambda\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2(\lambda x_1)+\lambda x_2\\ -\lambda x_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\ -x_2\end{pmatrix} = \lambda f(\vec{x})$$

$\Rightarrow$ <u>f linear</u>.

<u>Satz</u>: Sei V, W Vektorräume; $\{\vec{v}^{(j)}, j = 1, \dots, n\}$ Basis von V und $\{\vec{y}^{(j)}, j = 1 \dots n\}$ Vektoren in W. Dann $\exists!$ lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(\vec{v}^{(j)}) = \vec{y}^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$.

! Jede lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird durch eine $m \times n$ Matrix A, beschrieben. $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, wobei das j-te Spalte von A das Bild des j-ten Basisvektor im $\mathbb{R}^n$ ist

<u>Bemerkung</u>: Die Menge $(m \times n)$-Matrizen bilden einen Vektorraum

<u>Bsp</u>: Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x - z\\ x + 2y - 3z\end{pmatrix}$

Bestimme die Matrix A zu linearen Abbildung f:

d.h : $f(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Basis für $\mathbb{R}^3$ $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

$f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}; \quad \boxed{f(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}}$$

$$\begin{matrix}\downarrow & \downarrow & \downarrow\\ f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3)\end{matrix}$$

MATRIZENMULTIPLIKATION.

! Etwas komplizierter ist die Multiplikation von Matrizen.

Achtung: 2 Matrizen A und B können nur dann multipliziert werden, wenn ihre Formate zusammenpassen:

$\boxed{\text{Anzahl Spalten von } A = \text{Anzahl Zeilen von } B}$

Def.: Sei A eine $(m \times n)$-Matrix und B eine $(n \times r)$-Matrix. Dann ist $C = A \cdot B$ eine $(m \times r)$-Matrix definiert durch

$$\boxed{c_{ij} = \langle \vec{z}_i^{\,T}, \vec{s}_j \rangle} \quad \forall\, i = 1, \dots, m \quad \forall\, j = 1, \dots, r$$

$A = (a_{ij})$ $\quad i = 1, \dots, m$, $\; j = 1, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$B = (b_{ij})$ $\quad i = 1, \dots, n$, $\; j = 1, \dots, r$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$\vec{z}_i$ = i-ter Zeilenvektor von A

$\vec{z}_i = (a_{i1} \;\; a_{i2} \; \cdots, \; a_{in})$

$\vec{s}_j$ = j-ter Spaltenvektor von B

$$\vec{s}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}; \quad \vec{z}_i^{\,T} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$c_{ij} = \langle \vec{z}_i , \vec{s}_j \rangle = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \dots + a_{in}\, b_{nj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Bsp (1)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}}_{2 \times \underline{3}\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{\underline{2} \times 3\text{-Matrix}} \text{ - nicht definiert}$$

$$\neq$$

---

(2)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ 2 \times 3\text{-Matrix}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{B \\ 3 \times 2\text{-Matrix}}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C = A \cdot B \rightarrow 2 \times 2$ Matrix

$$c_{11} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4$$

$$c_{12} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 4 = 3$$

$$c_{21} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$$

$$c_{22} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 2$$

(3) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A\,:\,2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{B\,:\,2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $C = A \cdot B$ ist eine (2×2) - Matrix

$D = B \cdot A$ (2×2) - Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

! $\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

! $\boxed{A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A}$

Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

1. Matrizenmultiplikation ist Assoziativ
   $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

2. NICHT KOMMUTATIV : (Siehe Bsp (3) → oben)
   $A \cdot B \neq B \cdot A$

3. $\mathcal{O}$ = Nullmatrix : $A \cdot 0 = \mathcal{O} = 0 \cdot A$

4. I = Einheitsmatrix : $A \cdot I = I \cdot A = A \quad , \forall A$

5. Transponieren : $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

RANG EINER MATRIX

Bezeichnung $rg(A)$

A eine $(m \times n)$ - Matrix

A hat m - Zeilen
$$\left\{\begin{array}{l} (a_{11} \; \cdots \; a_{1n}) = \vec{z}_1 \\ (a_{21} \; \cdots \; a_{2n}) = \vec{z}_2 \\ \vdots \\ (a_{m1} \; \cdots \; a_{mn}) = \vec{z}_m \end{array}\right.$$
m Vektoren in $\mathbb{R}^n$

und n - Spalten
$$\left\{ \overset{\vec{s}_1}{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \; \overset{\vec{s}_2}{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}} \; \cdots \; \overset{\vec{s}_n}{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}} \right.$$

n Vektoren in $\mathbb{R}^m$

ZEILENRANG = Maximalanzahl unabhängiger Zeilenvektoren $(\leq n)$

$= \text{Dim Span}\{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_m\}$

! Wenn $m \geq n \Rightarrow$ mindestens $(m-n)$ Vektoren sind nicht linear unabhängig.

! Zeilenrang $\leq \min(m,n)$

SPALTENRANG = Maximalanzahl unabhängiger Spaltenvektoren. $(\leq m)$

$= \text{Dim Span}\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n\}$

! Spaltenrang $\leq \min(m,n)$

Spaltenrang = Zeilenrang $\leq \min(m,n)$

Bemerkung
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Rang}(0) = 0 \\ \text{Rang}(I_n) = n \end{array}\right.$$
; Alle anderen Matrizen haben >0 Rang.

Bsp: (für Rang einer Matrix)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{s}_1, \vec{s}_2$ linear abhängig da $\vec{s}_2 = 2\vec{s}_1$

Max. unabhängiger Vekt $= 1$

$\boxed{\text{Zeilenrang} A = \text{Spaltenrang} A = 1}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0 \Rightarrow 3(-2\alpha_2) + 5\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \qquad \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rightarrow$ linear unabhängig.

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad : (2 \times 3)$ – Matrix

Zeilenrang: $\begin{bmatrix} \vec{z}_1 = (3 \;\; 2 \;\; 1) \\ \vec{z}_2 = (0 \;\; 1 \;\; 2) \end{bmatrix}$ Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$\alpha_1 \vec{z}_1 + \alpha_2 \vec{z}_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow \vec{z}_1, \vec{z}_2$ Unabhängig

$\Rightarrow \boxed{\text{Zeilenrang} = 2}$

Spaltenrang $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Da $\vec{s}_1 = 2\vec{s}_2 - \vec{s}_3 \Rightarrow \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\}$ abhängig

aber $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ lin. unabhängig $\Rightarrow$

$\boxed{\text{Spaltenrang} = 2}$

Elementare Zeilen (Spalten-) Umformungen

F: Wie rechnet man den Rang einer Matrix, ohne die lineare Abhängigkeit (Unabhängigkeit) manuell zu überprüfen? Durch Zeilen (und Spalten) Umformungen

Satz: Folgende Zeilenumformungen (analog Spaltenumformungen) ändern den Rang einer Matrix nicht:

(i) Vertauschen von Zeilen (Spalten)

(ii) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$

(iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

* diese Zeilenumformungen heißen elementare Umformungen.
Spalten

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

Satz: Jede Matrix kann durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf Zeilennormalform gebracht werden und der Rang = Anzahl der verschiedenen Einheitsvektoren

Zeilennormalform wenn:

(i) Unterhalb der Hauptdiagonale alle Elemente $= 0$

(ii) das erste Element $\neq 0$ jeder Zeile ist 1, und in dessen Spalte sind alle anderen Matrixelemente (auch oberhalb) $= 0$

Bsp (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$ Rang 3 | (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ Rang 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Rang 3

GAUSS-JORDAN ALGORITHMUS

- Bringt eine Matrix auf Zeilennormalform.

Phase 1 : Zeilenstufenform für A : $(m \times n)$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & & a'_{1n} \\ 0 & 1 & & & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots\ a'_{mn} \end{pmatrix} = A'$$

A' Könnte auch so aussehen (Unter Hauptdiagonale $= 0$)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & a_1^* & & \\ & & & 0 & 0 & a_r^* & \\ 0 & & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Phase : Bringe A' zu Zeilennormalform

$$\begin{pmatrix} & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \rightarrow$$ Rang lesen.

Bsp $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Stufenform}} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{pmatrix}$

Stufe → Linksunten (egal wo die ist liegt)

* Zeilenstufenform heißt dass jede Zeile hat mindestens eine führende 0 mehr als die vorherige.

Algorithmus

- Man bringt durch eventuelle Zeilenvertauschung eine Zahl $\neq 0$ an die erste Stelle der 1. Spalte und anulliert die darunterstehenden Zahlen durch Substraktion eines passenden Vielfachen der neuen ersten Zeile von der zweiten, dritten, . . .

  → d.h., ist – nach eventuell Zeilenvertauschung $a_{11} \neq 0$, dann subtrahiert man das $\frac{a_{21}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile von der zweiten, das $\frac{a_{31}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile von der 3. etc.

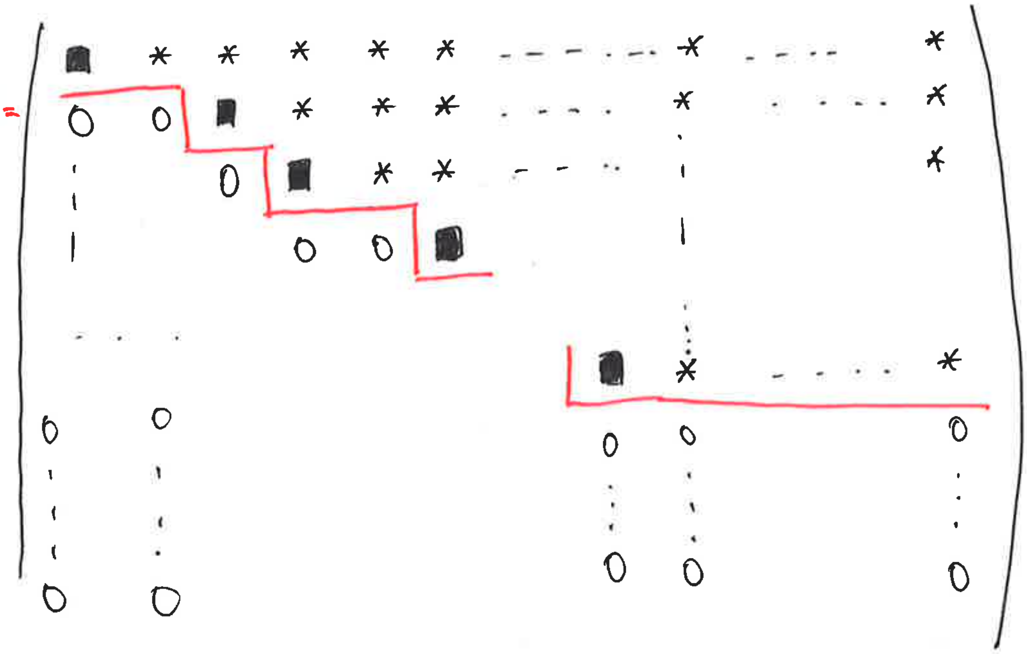
Aus A Entsteht eine Matrix B der Form:

$$B = \begin{pmatrix} \blacksquare & * & & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & \cdots & * \\ & & A_1 & & \end{pmatrix}$$

mit einer $(m-1) \times n$ Matrix A_1, deren vordere s Spalten 0 sind, $s \geq 1$ (beim 1. Eliminationsschritt können auch in anderen Spalten unterhalb der ersten Zeile lauter Nullen entstehen. An der $\blacksquare$ Stelle → eine Zahl $\neq 0$ über $*$ → Zahlen wissen nichts.

Wenn $A_1 = 0$ ⇒ fertig.

$A \neq 0$ ⇒ wiederholt man im 2. Eliminationsschritt denselben Rechenschritt an der ersten von Null verschiedenen Spalte von A_1 (die erste Zeile von B bleibt unverändert), bis man nach höchstens $(m-1)$-Schritten zu einer Matrix M gelangt, die eine Zeilenstufenform besitzt:

M =


■ → Zahlen ≠ 0
* → Irgendwelche Zahlen
Rest = 0

Kennzeichnen der Zeilenstufenform

→ In jede Zeile stehen links von ■ nur Nullen.

→ Liest man von oben nach unten, so rückt ■ pro Zeile um mindestens eine Stelle nach rechts.

Zeilennormalform

→ dividiere 1. Zeile durch ■
→ dividiere 2. Zeile mit ■ ...

Man beginnt mit M und stellt Schritt für Schritt die noch zum Vorliegen der Zeilennormalform nötige Eigenschaft her.

Bsp 1:

$rg(A) = ?$
≤ 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ +Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 20 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :6 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & 20 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} +3Z_2 \\ \\ +Z_2 \\ -10Z_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \cdot Z_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2}Z_3 \\ -\frac{1}{3}Z_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Stufen $\Rightarrow$ Rang 3

3 Einheitsvektoren

Bsp (2)

rg A = ?

rg A ≤ 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} +Z_3 \\ -\frac{1}{3}Z_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2Z_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\operatorname{rg} A = 3}$$