Mathematik B (ET) Sommersemester 2017

9. Übungsblatt (18. 5. 2017)

51. Sei $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Transformieren Sie in Polarkoordinaten: (3 Pkt.)

$$(x - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

52. Gegeben sind die Vektorfelder $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit (2 Pkt.)

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 1 + x + y \\ xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad \vec{g}(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 \\ b + d \\ a^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Jacobi-Matrix von $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ im Punkt $(1, -1)$.

53. Beweisen Sie die Identität (3 Pkt.)

$$\text{rot}(f \cdot \vec{v}) = \text{grad} f \times \vec{v} + f \cdot \text{rot}(\vec{v})$$

für $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

54. Berechnen Sie (2 Pkt.)

$$\text{rot}(\vec{u} \times \text{grad} f)$$

mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

55. Berechnen Sie (2 Pkt.)

$$(\vec{u} \times \nabla) \times \vec{v}$$

mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$.

56. Berechnen Sie (3 Pkt.)

$$\text{rot}(\vec{u} \times \text{grad} f),$$

für $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

Einmal direkt und einmal mit Hilfe der Identität

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) = (\text{div} \vec{w}) \vec{v} - (\text{div} \vec{v}) \vec{w} + J_{\vec{v}} \vec{w} - J_{\vec{w}} \vec{v},$$

wobei $J_{\vec{v}}$ die Jacobimatrix des Vectorfeldes $\vec{v}$ und $J_{\vec{w}}$ die Jacobimatrix von $\vec{w}$ ist.