## $\boxed{\text{Beispiel 1}}$

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 4$
$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 =$
$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = 5$

$$\begin{cases} \mu(\lambda_1) = \nu(\lambda_1) = 1 \\ \mu(\lambda_2) = \nu(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

- Eigenvektor zu $\boxed{\lambda_1 = 1} \to \vec{v}^{(1)} = ?$ mit $A\vec{v}^{(1)} = 1 \cdot \vec{v}^{(1)} \Rightarrow$

$$(A - 1I)\vec{v}^{(1)} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$2v_1^{(1)} + 2v_2^{(1)} = 0 \; ; \; v_1^{(1)} = t \Rightarrow v_2^{(1)} = -t \; , \; t \in \mathbb{R}$

$\vec{v}^{(1)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , t \in \mathbb{R}$. Wähle $t = 1$

$\Rightarrow$ 1. Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}^{(1)}$ $\Rightarrow$ 1. Lösung $e^{1\cdot x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5$ : $\vec{v}^{(2)} = ?$

$$(A - 5I)\vec{v}^{(2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{(2)} \\ \vec{v}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 2\vec{v}_1^{(2)} - 2\vec{v}_2^{(2)} = 0$$

$\Rightarrow \vec{v}^{(2)} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , s \in \mathbb{R}$ ,

Wähle $s = 1$ $\Rightarrow$ 2. Eigenvektor $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

2. Lösung $e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem: $\left\{ e^{1x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \vec{Y}_{hom}(x) = c_1 e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Beispiel 2}}$ $\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$ ; $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda)$: $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\lambda = 2 \;,\; \text{mit } \mu(\lambda) = 2}$

Was ist $\nu(\lambda) = ?$

$\underline{\text{Eigenraum zu } \lambda = 2}$ : $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rang } = 0} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ 2 − 0 unabhängige Vekt

$\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$ – 2 unabh. Vekt in $\mathbb{R}^2$

$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem: $\left\{ e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung: $\vec{y}(x) = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

$\boxed{\text{Beispiel 3}}$ $\vec{y}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \vec{y}$ (*)

• $P(\lambda) = \det|A - \lambda I| = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 9 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 =$

$= (\lambda+1)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \;;\; \mu(\lambda_1) = 1 \;;\; \nu(\lambda_1) = 1 \\ \lambda_2 = 1 \;;\; \mu(\lambda_2) = 2 \;;\; \nu(\lambda_2) = ? \end{cases}$

(1 oder 2)

• Eigenvektor $\vec{v}^{(1)}$ zu $\boxed{\lambda_1 = -1}$ : $(A + I)\cdot\vec{v}^{(1)} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{III}: -v_2^{(1)} = 0$

$\underline{II}\ v_1^{(1)} + 3v_3^{(1)} = 0 \Rightarrow v_1^{(1)} = -3v_3^{(1)}$

$\underline{I}\ 3v_1^{(1)} + 9v_3^{(1)} = 0 \Rightarrow v_1^{(1)} = -3v_3^{(1)}$

$v_3^{(1)} = t \Rightarrow v^{(1)} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Wähle $\boxed{t = 1}$

$\Rightarrow$ Eigenvektor zu $\lambda_1 = -1 : \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Lösung: $\vec{y}^{[1]} = e^{-x}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\boxed{\text{Eigenvektor zu } \lambda_2 = 1}$

$(A - I)\vec{v}^{(2)} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{III}.\ -v_2^{(2)} - 2v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow v_2^{(2)} = -2v_3^{(2)}$

$\underline{II}\ v_1^{(2)} - v_2^{(2)} + 3v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow v_1^{(2)} + 2v_3^{(2)} + 3v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow$

$v_1^{(2)} = -5v_3^{(2)}$

$\underline{I}\ v_1^{(2)} + 2v_2^{(2)} + 9v_3^{(2)} = 0 \Rightarrow -5v_3^{(2)} + 2\cdot(-2v_3^{(2)}) + 9v_3^{(2)} = 0$

$0 = 0$

1. Freiheitsparameter: $v_3^{(2)} = t \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} -5t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}$

Wähle $\underline{t = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösung $\vec{y}^{[2]} = e^{1x}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Brauchen noch eine Lösung: $\vec{y}^{[3]}$.

~~Ansatz für eine weitere Lösung~~ : $p_i$ Grad $2 - 1 = 1$

$$\cancel{\vec{y}^{[3]} = e^{1x}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ p_3(x) \end{pmatrix} = e^{1x}\begin{pmatrix} a_1x + b_1 \\ a_2x + b_2 \\ a_3x + b_3 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{y}^{[3]} = x e^{1x}\vec{v}^{(2)} + e^{1\cdot x}\vec{v}^{(3)} = x e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} + e^{x}\begin{pmatrix}v_1^{(3)}\\v_2^{(3)}\\v_3^{(3)}\end{pmatrix}$$

mit $(A - 1\cdot I)\vec{v}^{(3)} = \vec{v}^{(2)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&9\\1&-1&3\\0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^{(3)}\\v_2^{(3)}\\v_3^{(3)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{III}: -v_2^{(3)} - 2v_3^{(3)} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2^{(3)} = -2v_3^{(3)} - 1}$$

$$\text{II}: v_1^{(3)} - \left(-2v_3^{(3)} - 1\right) + 3v_3^{(3)} = -2 \Rightarrow v_1^{(3)} + 5v_3^{(3)} = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1^{(3)} = -5v_3^{(3)} - 3}$$

$$\text{I} \quad \underbrace{\left(-5v_3^{(3)} - 3\right)}_{v_1^{(3)}} + 2\underbrace{\left(-2v_3^{(3)} - 1\right)}_{v_2^{(3)}} + 9v_3^{(3)} = -5 \Rightarrow$$

$$0 = 0$$

$$v_3^{(3)} = t \quad \Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix}-5t-3\\-2t-1\\t\end{pmatrix}$$

$t=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \text{Lösung } \vec{y}^{[3]} = x e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} + e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem: $\left\{\vec{y}^{[1]} = e^{-x}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix};\ \vec{y}^{[2]} = e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix};\ \vec{y}^{[3]} = x e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} + e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Lösung

$$\boxed{\vec{y}(x) = C_1 e^{-x}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix} + C_3 x e^{x}\begin{pmatrix}-5\\-2\\1\end{pmatrix}}$$

## Beispiel 5

$$\vec{y}\,' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \vec{y} \qquad A = \ldots$$

$$P(\lambda) = \det|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\mu(\lambda) = 3$$

$$\nu(\lambda) = ?$$

Eigenvektor zu $\lambda = 1$: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Rang } 1} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{II} & v_1^{(1)} = v_2^{(1)} \\ \text{I} & v_1^{(1)} = -v_3^{(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wähle $t = 1 \Rightarrow \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 1. Lösung: $\boxed{\vec{y}^{[1]} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Fehlen 2 Lösungen

$$\boxed{\vec{y}^{[2]} = x e^{1\cdot x} \vec{v}^{(1)} + e^{1\cdot x} \vec{v}^{(2)}} \quad \text{mit}$$

$$(A - 1\cdot I)\vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & v_1^{(2)} = 1 - v_3^{(2)} \\ \text{II} & v_2^{(2)} = v_1^{(2)} - 1 = \\ & = 1 - v_3^{(2)} - 1 \\ & = -v_3^{(2)} \end{array}$$

$$\text{III} \quad -v_1^{(2)} + v_2^{(2)} = 1 \Leftrightarrow -1 + \cancel{v_3^{(2)}} - \cancel{v_3^{(2)}} = -1$$

$\boxed{v_3^{(2)} = t}$ ; $\boxed{v_1^{(2)} = 1 - t}$ ; $\boxed{v_2^{(2)} = -t}$ $\Rightarrow$

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ t \end{pmatrix}; \text{ Wähle } t = 1: \; v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Lösung: $\boxed{\vec{y}^{[2]}(x) = x e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Fehlt noch 1 Lösung $\vec{y}^{[3]}$; Ansatz für $\vec{y}^{[3]}$:

$$\vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2} e^x \vec{v}^{(1)} + x e^x \vec{v}^{(2)} + e^x \underbrace{\vec{v}^{(3)}}_{?} \quad \text{mit}$$

$$(A-I)\underbrace{\vec{v}^{(3)}}_{?} = \vec{v}^{(2)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad \underbrace{v_1^{(3)}}_{t} + v_3^{(3)} = 0 \Rightarrow v_3^{(3)} = -t$$

$$\text{II} \quad t - v_2^{(3)} = -1 \Rightarrow v_2^{(3)} = t+1 \Rightarrow \vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Wähle $t = 1 \Rightarrow$

$$\vec{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2} e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Fundamentalsystem $\{\vec{y}^{[1]}, \vec{y}^{[2]}, \vec{y}^{[3]}\}$

Lösung des DGLS:

$$\vec{y}(x) = c_1 \vec{y}^{[1]}(x) + c_2 \vec{y}^{[2]}(x) + c_3 \vec{y}^{[3]}(x) =$$

$$= c_1 e^x \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] + c_2 x e^x \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] +$$

$$c_3 x^2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{c_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 x e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 x^2 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{y}(x)}$$