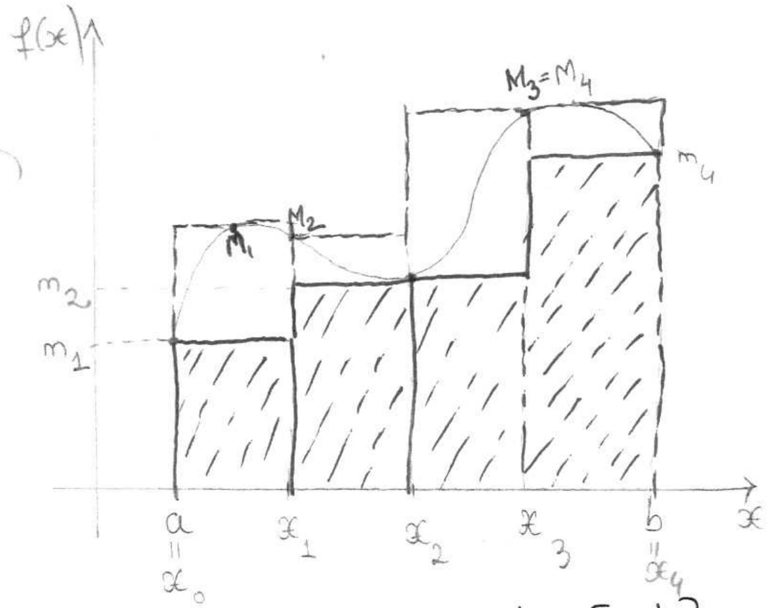
F. INTEGRATION

F1. DAS BESTIMMTE INTEGRAL

(A) OBER- UND UNTERSUMMEN

- Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. auf $[a,b]$. Gesucht: der Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse?



- Zerlegen das Interval $[a,b]$ in n Teilintervale:

  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \to$ eine Zerlegung Z

  $[x_0, x_1],\ [x_1, x_2] \dots [x_{n-1}, x_n]$

In jedem Intervall, suchen wir den "kleinsten" und "größten" Funktionswert:

$$m_1 = \inf_{x \in [x_0, x_1]} f(x) \quad \dots \quad m_n = \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

$$M_1 = \sup_{x \in [x_0, x_1]} f(x) \qquad M_n = \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x)$$

Wir schätzen den Flächeninhalt von oben und von unten ab.

- Von unten: errichte auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein Rechteck der Höhe m_k $\Rightarrow$

gesuchte Fläche $\geq \underbrace{\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{m_1}_{\text{Höhe}}}_{\text{1. Rechteck}} + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + \dots (x_n - x_{n-1}) m_n =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, m_k = U(Z,f) \text{ (Untersumme)}$$

- Von oben : Höhe M_k statt m_k

gesuchte Fläche $\leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k = \underset{\text{Obersumme}}{O(Z,f)}$

- Je nach Anzahl und nach Wahl der n Teilintervalle ergeben sich unterschiedliche O- und U- summen. mit $U(Z,f) \leq O(Z,f)$.

Also gilt: $U(Z,f) \leq f \leq O(Z,f)$, $\forall$ Zerlegungen $\forall \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow s = \overbrace{\sup \{ U(Z,f) \mid \text{Zerlegungen} \}}^{= \mathcal{U}} \leq f$$

$$\leq \overbrace{\inf \{ O(Z,f) \mid \text{Zerlegungen } Z \}}^{\mathcal{O}} = S$$

Def: Gilt $s = S$, so heißt f auf $[a,b]$ (Riemann-) integrierbar und wir nennen

$$\int_a^b f(x)\,dx := s = S$$

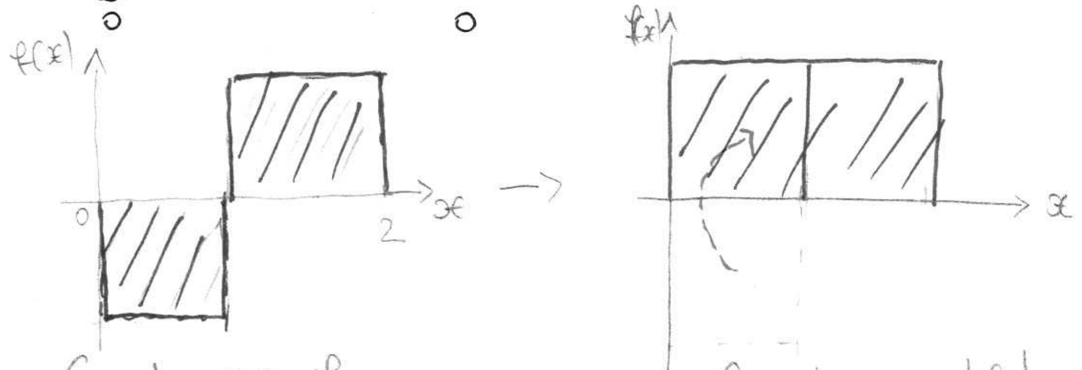
das Integral von f auf $[a,b]$; $f(x)$ heißt Integrand.

- Falls $s < S$ → es kann kein Flächeninhalt definiert werden.

<u>Bemerkung</u>: Will man wirklich den Flächeninhalt, so ist bei negativen Funktionswerten der Graph in diesen Bereichen an der x-Achse zu spiegeln, d.h $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ist der gesuchte Flächeninh

<u>Bsp</u>: $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Es gilt: $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$. Der Flächeninhalt ist aber
$$\int_0^2 |f(x)|\,dx = \int_0^2 1\,dx = 2$$



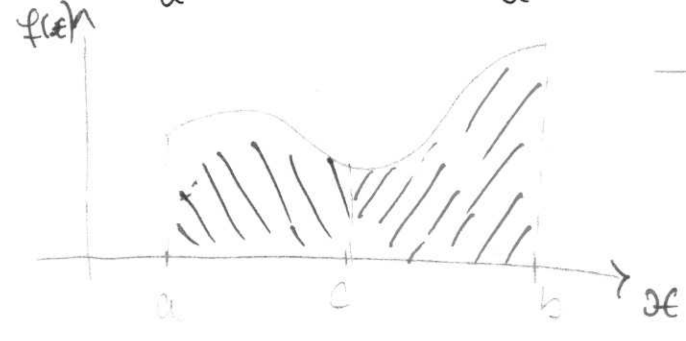
Graph von f — Graph von $|f|$

<u>Satz</u>:
a) Jede auf $[a,b]$ monotone Fkt. ist integrierbar
b) Jede auf $[a,b]$ stetige Fkt. ist integrierbar.

(B) ELEMENTARE EIGENSCHAFTEN VON INTEGRALE

1. **ADDITIVITÄT**: Sei $a \le c \le b$. Es gilt

- f auf $[a,b]$ integrierbar $\Leftrightarrow$ f auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar. In diesem Fall ist
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



→ Der Integrationsbereich kann in 2 Teile aufgeteilt werden und die einzelnen Int. addieren sich zum ursprünglichen Integral.

<u>Bemerkung</u>: bisher $\int_a^b f(x)\,dx$ war nur für $a<b$ definiert:
Züsätzlich gilt es:

(i) $a>b$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(ii) $a=b$: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

2. TRANSLATIONSINVARIANZ

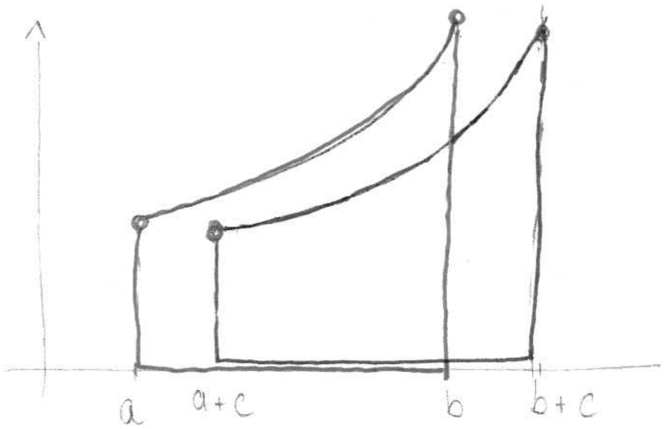
→ Verschieben $f(x)$ parallel zur x-Achse!

→ Wie verhalten sich Integrale?

$x \in [a,b] \Rightarrow$

$x + c \in [a+c, b+c]$

$f'(a+c) = f(a)$



<u>Satz</u>: $\forall c \in \mathbb{R}$ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx}$

$y = x - c$; $dy = dx$

$\left.\begin{array}{l} y = a + c \Rightarrow \quad x = a \\ y = b + c \Rightarrow \quad x = b \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy$

3. LINEARITÄT

Sei f, g auf $[a,b]$ integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f$, $f+g$ und $f-g$ sind auf $[a,b]$ integrierbar und:

(i) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b (\lambda f(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

4. PRODUKT

- Sind f und g integrierbare Fkt. über $[a,b]$, dann ist $f \cdot g$ auch integrierbar.

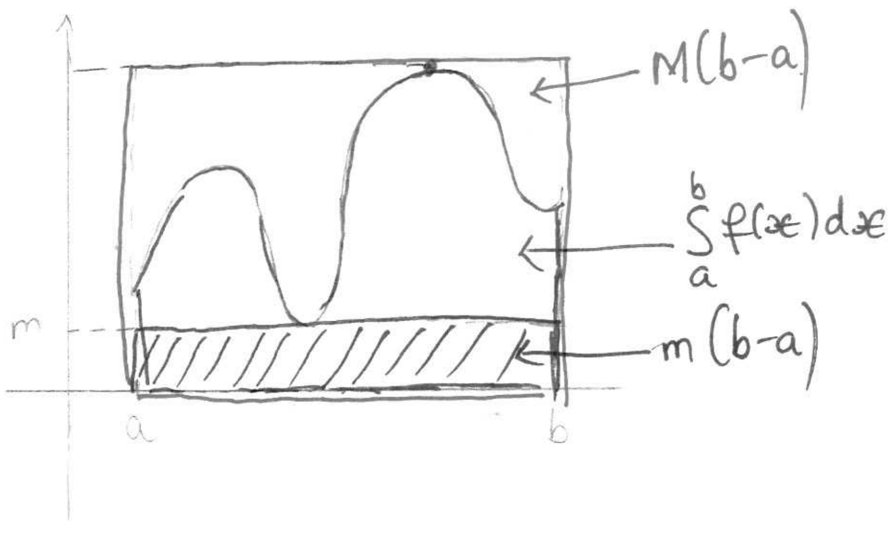
5. MONOTONIE DES INTEGRALS

(i) Falls $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ und f integrierbar in $[a,b] \Rightarrow$
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(ii) Sind f, g integrierbar auf $[a,b]$ und $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$:
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(iii) Sei f integrierbar und beschränkt auf $[a,b]$, d.h. $\exists\, m$ und M mit $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Dann
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$$ → Siehe Bild unten

(iv) "Dreiecksungleichung für Integrale"
Ist f auf $[a,b]$ integrierbar dann auch $|f|$, und
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$



(C) MITTELWERTSÄTZE DER INTEGRALRECHNUNG

Satz 1 [Verallgemeinerter MWS der Integralrechnung]

Sei $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f stetig und $g \geq 0$ integrierbar. Dann $\exists$ ein $c \in [a,b]$ so daß

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx}$$

Beweis - Skizze: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f integr. und nimmt min und max in $[a,b]$ an. Sei

$$\left.\begin{aligned} m &= \min_{x \in [a,b]} f(x) \\ M &= \max_{x \in [a,b]} f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow$$

$$m\, g(x) \leq f(x)\, g(x) \leq M\, g(x) \Rightarrow$$

(*)
$$\Rightarrow \boxed{m \cdot \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx} \quad : \int_a^b g(x)$$

Fall 1: $g(x) = 0 \quad \Rightarrow$ Beweiß fertig $\to$ trivial

Fall 2: $g(x) > 0$

$$(*) : \int_a^b g(x) \Rightarrow \quad m \leq \mu \leq M \quad \text{mit}$$

$$\boxed{\mu = \frac{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)}} = f(c)$$

MWS für stetige Fkt: f nimmt jeden Wert zwischen m und M an $\Rightarrow \exists\, c \in [a,b] : f(c) = \mu \Rightarrow$

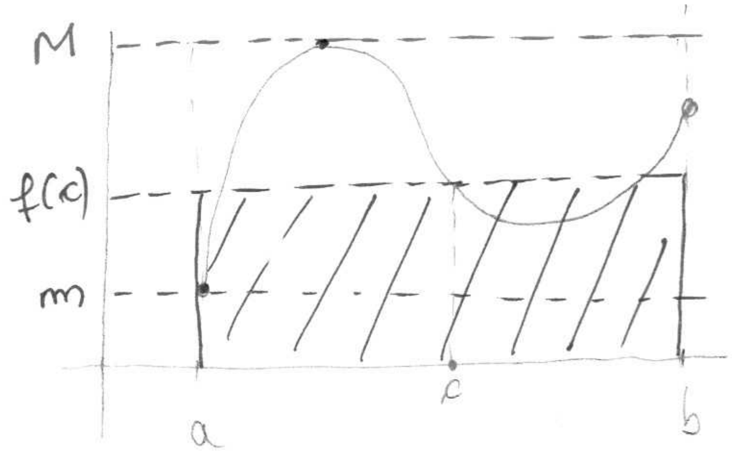
$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)}$$

□

Satz 2 [MWS der Integralrechnung]
Ist f stetig im $[a,b]$, dann gibt es ein $c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

Beweis: $g(x) = 1$ in Satz 1. vorher.



F2 UNBESTIMMTE INTEGRALE

- hat W.W gemacht
- Kurze Erinnerung + Wiederholung

- f auf $[a,b]$ integrierbar, $x \in [a,b]$, dann bilden

$$x \longmapsto F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

Satz 1: Ist $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ auf jeden Intervall $[a, x]$ beschränkt und Integrierbar $\Rightarrow$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{eine stetige Fkt von } x.$$

Satz 2 Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, dann ist F in jedem Stetigkeitspkt x von f diff'bar und es gilt dort: $F'(x) = f(x)$

! Ist f stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ $F'(x) = f(x)$ auf $[a,b]$

Def: Gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in I$, dann
$F(x)$ = Stammfkt oder unbestimmtes Integral von f.

Folgerung: $\left.\begin{array}{l} F(x) \text{ Stammfkt von } f \\ C \in \mathbb{R} \text{ Konstante} \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) + C$ auch Stammfkt von $f(x)$

Schreibweise: $F(x) = \int f(x)\,dx + C$.

Umkehrung: F und G Stammfkt von $f \Rightarrow F - G =$ Konstante

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung:
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Stammfkt von f, so gilt

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

★ Satz ⇒ bestimmte Integrale werden mit Hilfe von Stammfkt berechnet

★ Stammfkt kann man mit Regeln fürs Differenzieren rechnen.

F3. INTEGRATIONSMETHODEN

<u>Satz</u>: f, g stetig auf I und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ =>

$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx .$$

(A) PARTIELLE INTEGRATION

- Sei f und g auf I stetig differentierbar. =>

$$\boxed{\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx}$$

$I = [a, b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx}$$

(B) INTEGRATION DURCH SUBSTITUTION

- Die Integration durch Substitution geht auf die Kettenregel zurück.

f, G stetig diff'bar, $g = G'$ und $H := G \circ f$

<u>Kettenregel</u>: $H'(x) = G'(f(x))\, f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$

$\Downarrow$

<u>Substitutionsregel</u>: $\boxed{\int g(f(x))\, f'(x)\, dx = G(f(x)) + \text{Const}}$, wobei G die Stammfkt von g ist.

(i) <u>Subst. im bestimmten Integral</u>:

$$\boxed{\int_a^b g(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy}$$

Subst: $f(x) = y$ $\quad f'(x)\, dx = dy$

$x = a \Rightarrow f(x) = f(a)$; $x = b \Rightarrow f(x) = f(b)$

- Dieses Int wird berechnet (bei bestimmten Integral keine Rücksubstitution)

(ii) Substitution im unbestimmten Integral:

$$\boxed{\int g(f(x))\, f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy = G(y) \underset{\text{Rücksubstitution}}{=} G(f(x))}$$

Setze $f(x) = y$

Bsp: $\underbrace{\int \frac{\ln x}{x}\,dx}_{\text{unbestimmt}}$ und $\underbrace{\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx}_{\text{bestimmtes Integral}}$

Substitution $\ln x = y \Rightarrow$

$x = e^y \Rightarrow dx = e^y\,dy$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{y}{e^y} \cdot e^y\,dy = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C =$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Bestimmtes Integral:

$\ln x = y \quad ; \quad dx = e^y\,dy$

$x = 1 \Rightarrow y = \ln 1 = 0$

$x = e \Rightarrow y = \ln e = 1$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

F4. BOGENLÄNGE VON KURVEN

<u>Def</u>: Sei I ein Interval. Eine Vektorwertige Funktion $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^d$ mit,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I$$

wobei alle x_i sind 1-dim. Fkt, heißt <u>Parameterdarstellung</u> einer <u>Kurve</u> $\vec{x}(t)$ im d-dimensionalen Raum.

$$\begin{cases} \vec{x} : I \to \mathbb{R}^d & \text{Kurve} \\ t & \text{Parameter} \\ I & \text{Parameterintervall} \end{cases}$$

- Mit wachsendem t, die Kurve läuft in positiver Richtung.

Wenn $I = [a,b]$ dann: $\left.\begin{array}{l} \vec{x}(a) \to \text{Anfangspunkt} \\ \vec{x}(b) \to \text{Endpunkt} \end{array}\right\}$ der Kurve

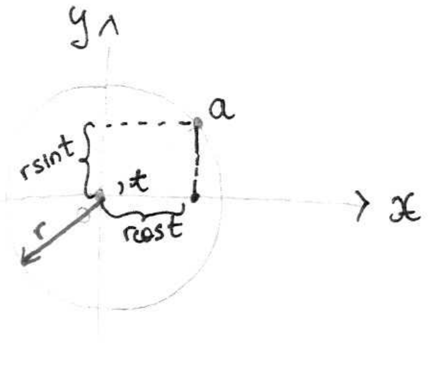
- Teilchenbahnen sind Beispiele für Kurven.

<u>Beispiele</u>:

(1) Kreis um $(0,0)$ mit Radius r.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

t = Winkel



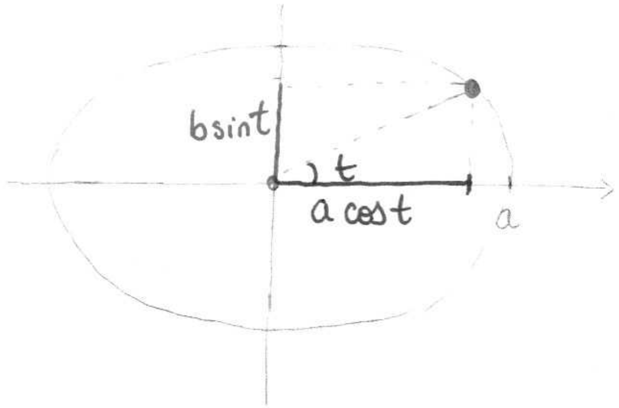
- $\vec{x}(t)$ stellt einen Kreis dar, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

(2) <u>Ellipse</u> in $\mathbb{R}^2$: hat Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

- $\vec{x}(t)$ läuft im Gegenuhrzeigersinn

- t = Winkel

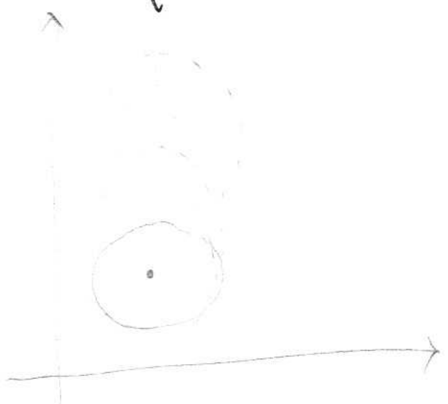


---

(3) <u>(Schraubenlinie) Schraubenbewegung</u> mit radius r nach oben ist eine 3-Dim. Kurve mit Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

- Überlagerung einer Kreisbewegung mit Radius r in der x-y Ebene und einer linearen Bewegung in z-Ebene mit der Ganghöhe $2h\pi$



- Eine Kurve besitzt mehrere Darstellungen (unendlich viele)
  - → Parameterdarstellung (vorher erwähnt)
  - → Implizite Darstellung (Parameter wird Eliminier

Implizite Darstellung

- Parameter t wird eliminiert

Bsp (1) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2 \Rightarrow$

$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = r^2}$ → Implizite Darstellung

Bsp (2): Ellipse:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Bsp (3) Schraubenlinie

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = r^2, \quad x_3 \geq 0}$$

- Wenn alle Fkt. $x_i(t)$, $i = 1 \ldots d$ sind diff'bar dann ist die Kurve auch diff'bar, mit Ableitungen $\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$

Tangentenvektor an die Kurve $x(t)$ im Punkt t_0

$$\vec{x}'(t_0) = \dot{\vec{x}}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_0) \\ \dot{x}_2(t_0) \end{pmatrix}$$

Bsp: (1) Kreis: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}$

(2) Ellipse: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

(3) Schraubenbewegung: $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$

- Glatte Kurve: $\vec{x}(t)$ heißt glatt wenn alle $x_i(t)$ diff.'bar sind und die Ableitungen sind stetig.

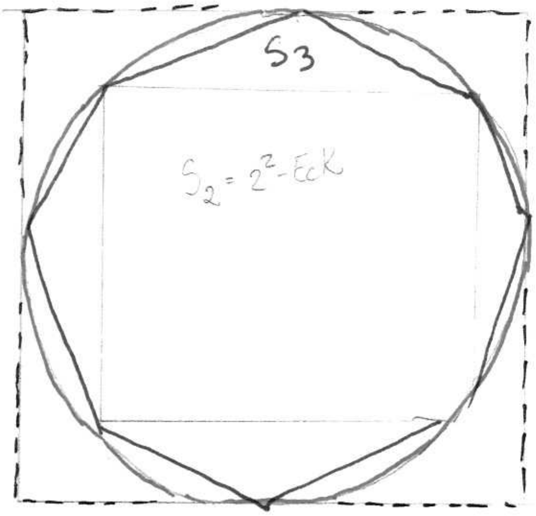
- Stückweise glatte Kurve auf $[a,b]$: $\vec{x}(t)$ ist stetig auf $[a,b]$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen, in denen aber aber die links- und rechtseitigen Grenzwerte von $\vec{x}(t)$ existieren.

- glatte Kurve

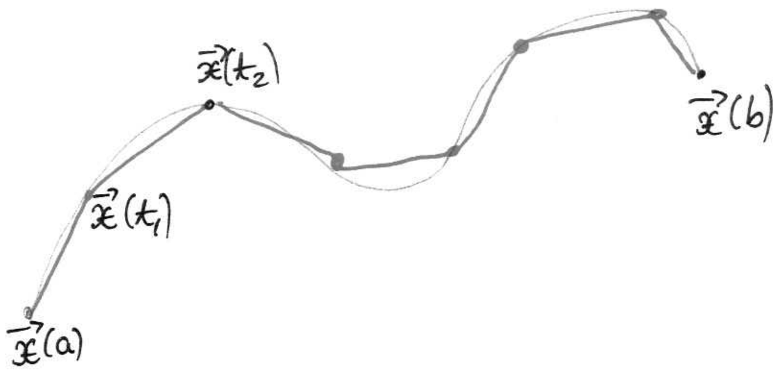
BOGENLÄNGE EINER KURVE

- wichtige Anwendung der Integralrechnung auf Kurven.

Motivierendes Beispiel: Approximiere Kreis durch eingeschriebene regelmäßige 2^n-Ecke $(n \geq 2)$. Ihre Umfänge S_n wachsen monoton in n und sind z.B durch den Umfang eines Umbeschriebenen Quadrats nach oben beschränkt. Somit existiert $\sup_n (S_n) \Rightarrow$ definiert den Kreisumfang.



Allgemein für Kurve $\vec{x}(t)$:



Für Kurve $\vec{x}(t)$: annährung durch einen Polygonzug P für eine Zerlegung P des Intervals $[a, b]$

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b \}$$

ist seine Länge gegeben durch:

$$\boxed{L(P) = \|\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_0)\| + \|\vec{x}(t_2) - \vec{x}(t_1)\| + \dots + \|\vec{x}(t_r) - \vec{x}(t_{r-1})\|}$$

$\|\cdot\| \rightarrow$ Euklidische Norm eines Vektors.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_d(t) \end{pmatrix}, \quad \|\vec{x}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_d^2(t)}$$

- Für feinere Zerlegungen (d.h $n \to \infty$) $\ell(P)$ wird die Länge der Kurve approxiemeren (wir wollen $\ell(P)$ durch Integral app

$$\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1}) = \begin{pmatrix} x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}) \\ x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}) \\ \vdots \\ x_d(t_i) - x_d(t_{i-1}) \end{pmatrix}$$

$i = 1, \dots r$

und

$$\boxed{\|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})\right)^2}}$$

Erinnerung:

> Mittelwertsatz der Differentialrechnung
> $f: [a, b]$ stetig, und in (a, b) diff'bar $\Rightarrow \exists \; x_0 \in (a, b)$
> mit $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$

Anwenden mws für Funktionen x_j im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$:
(x_j ist stetig auf $[t_{i-1}, t_i]$ und diff.'bar auf (t_{i-1}, t_i))

$\Rightarrow \exists \quad \tau_j \in (t_{i-1}, t_i)$:

$$x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}) = x_j'(\tilde{\tau}_j)(t_i - t_{i-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\tau_j)\right)^2}\,(t_i - t_{i-1})} \quad (*)$$

und

$$\ell(P) = \sum_{i=1}^{r} (t_i - t_{i-1}) \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\tau_j)\right)^2}}_{f(t) = \|\vec{x}'(t)\| = \|\dot{\vec{x}}(t)\|}$$

M.W.S der Integralrechnung
für $f(t)$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a,b]$

Für $f(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j'(\tau_j))^2}$ auf $[t_{i-1}, t_i]$; $\exists\, \tau \in$

$\tau \in (t_{i-1}, t_i)$:

$$(*) \quad \boxed{\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,d(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \left(x_j'(\tau)\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1})}$$

Im Grenzwert, wenn die Zerlegung P immer feiner wird, wird $(*)$ und $(**)$ $\rightarrow$ sehr nah ~~b~~einander und man kann die Länge der Kurve so definieren:

$$\boxed{L = \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{x}_2(t)^2 + \ldots + \dot{x}_d(t)^2}\,dt}$$

Bsp: (1) Kreis : $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$

(2) Ellipse $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$

(3) Schraubenlinie : $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + h^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + h^2}\, dt =$

$= 2\pi \sqrt{r^2 + h^2}$

Parameterwechsel Kurven : → weg lassen

- Ist $\vec{x}(t)$ eine Kurve und $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetige, bijektive und monoton wachsende Fkt (oder fallende), so stellt die "neue" Kurve $\vec{y}(\tau) := \vec{x}(g(\tau))$ dieselbe Kurve (als Punktmenge) dar.

- Parametrisierung durch Bogenlänge fkt. von Kurve $\vec{x}(t)$, $t \in [a, b]$

$$s(t) = \int_a^t \| \dot{\vec{x}}(u) \| \, du$$

$$s(a) = 0, \quad s(b) = L$$

Umkehr fkt $\Rightarrow t(s) : [0, L] \to [a, b]$

Parameterwechsel $\boxed{\vec{y}(s) := \vec{x}(t(s))}$

Bsp: (1) Kreis $\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\dot{\vec{x}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Bogenlänge $s(\varphi) = \int_0^{\varphi} r\, d\varphi = r\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{s}{r}$ und

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{s}{r} \\ r \sin \frac{s}{r} \end{pmatrix} ; \qquad 0 \leq s \leq 2\pi r$$

F5. NUMERISCHE INTEGRATION

- In vielen Fällen ist es nicht möglich, eine explizite Formel für $\int f(x)\,dx$ anzugeben, obwohl die Fkt. $f(x)$ in $[a,b]$ integrierbar ist. In diesen Fällen kann man eine numerische Approx für $\int_a^b f(x)\,dx$ gewinnen.

- Unter numerische Integration versteht man die nährungsweise Berechnung eines bestimmten Integrals, gestützt auf endlich viele Funktionswerte $f(x_i)$ $(i=0,1,\dots,n)$ in der Form $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ mit

α_i = Gewichte

- Restglied $R := \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$ muss auch approxiemiert werden.

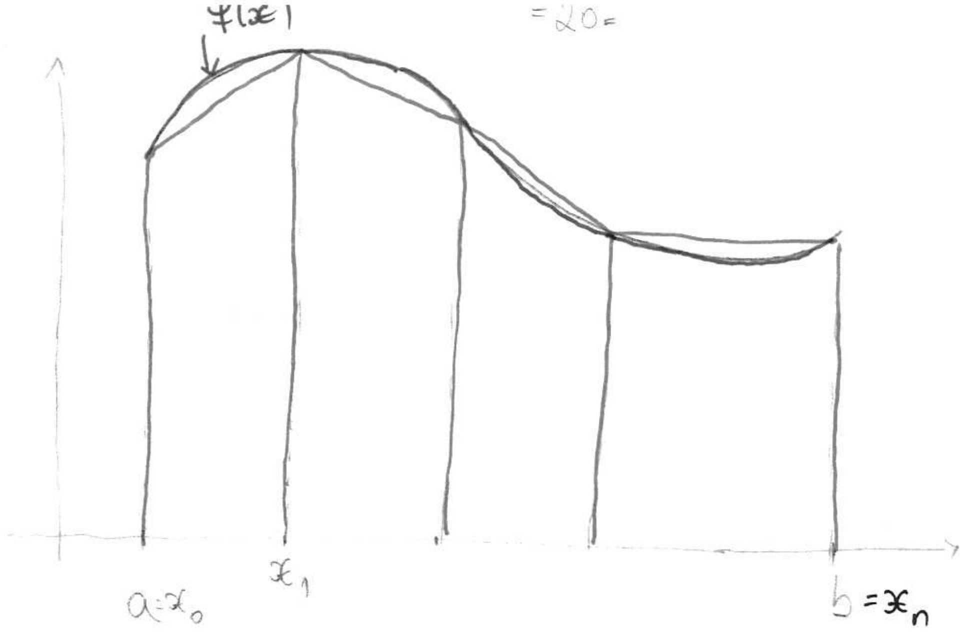
TRAPEZ - REGELN

Bei der Appoximation des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ nach der Trapez-Regel, geht man von einer äquidistanten Zerlegung des Grundintervals

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

- Schrittweite $h := \frac{b-a}{n}$
- Stützstellen : $x_i := a + ih$, $i = 0, 1 \dots, n$

Man ersetzt die Kurve $f(x)$ über jeden Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ durch die $(x_{i-1}, f(x_{i-1})) - (x_i, f(x_i))$ verbindende Linie.

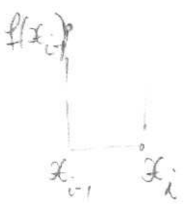


Approximation

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx T(h) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]}$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Flächeninhalt Trapez



$\rightarrow$ Fläche $\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{h} \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$

$= \dfrac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$

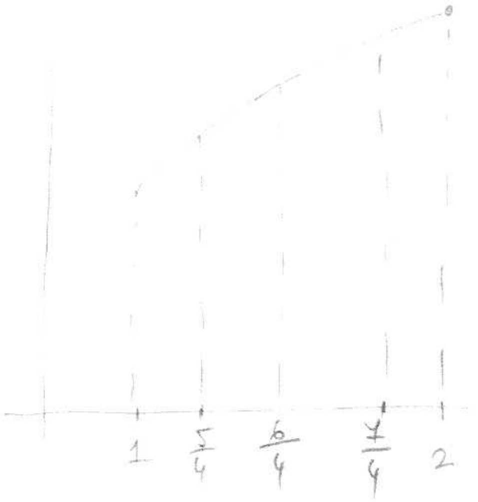
- über jedes Teilinterval

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx T_i = \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

Rest: Ist f zweimal stetig diff'bar auf $[a,b]$, dann gilt für das Restglied $R(f)$ folgende Abschätzung

$$|R(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Bsp: $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ mit Trapez-regel mit $n = 4$



$$h = \frac{b-a}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{6}{4}, \quad x_3 = \frac{7}{4}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$T(f) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{6}{4}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{7}{4}\right)\right]$$

$$= \underline{\underline{0{,}8301}}$$

$$f(x) = x^{-1/2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4} x^{-5/2}$$

$f'''(x) = \frac{-15}{8} x^{-7/2} < 0, \quad \forall x \in [1,2] \Rightarrow f''$ monoton fallend auf $[1,2] \Rightarrow$ nimmt Max in $x = 1 \Rightarrow \max_{1 \le x \le 2} |f''(x)| = \frac{3}{4}$

$$\boxed{R(f) \le \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{16}}$$

F6. INTEGRAL UND FOLGEN VON FUNKTIONEN

Erinnerung • Gleichmäßige Konv von (f_n) gegen f:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon : \exists\, n_\varepsilon \;, \forall n \geq n_\varepsilon \; : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,, \forall x \in \mathbb{R}$$

(n_ε ist unabhängig von x)

• Punktweise Konv von (f_n) gegen f:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \forall x \,, \exists\, n_\varepsilon^{(x)} : \forall\, n \geq n_\varepsilon$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

• Gleichmäßige Konv ⇒ Punktweise Konv.

Bsp: 1) $f_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ Konvergiert gleichmäßig und Punktweise gegen 0

2) $f_n(x) = n^2(1-x)x^n \quad , x \in [0,1]$

Punkweise: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 (n^2 x^n - n^2 x^{n+1})\,dx = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x) \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

, da $f_n \not\to f_n$ nichtgleichmäßig

Satz: Ist $f_n(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar und Konvergiert gleichmäßig gegen f, dann ist auch $f(x)$ auf $[a,b]$ integrierbar und

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx .}$$

F7 FOURIER - REIHEN

- Die Grundidee der Fourier-Reihe geht von der Annahme aus, dass die trigonometrischen FKt (sin, cos) eine sehr bedeutende Rolle für alle Periodischen FKt. spielen. Es handelt sich sozusagen um die Atome unter der Periodischen FKt, in dem Sinn, dass man so gut wie alle praktisch wichtigen. per. FKt aus geignet skalierten Sinus- und Kosinusbausteiner "Zusammensetzen" Kann.

- Wollen eine FKt. mit Hilfe einer LinearKombination ist in der Mathematik nicht neu:
  - → Taylorreihe : eine FKt wird in eine Potenzreihe entwick
  - → Fourierreihe : verwendet Sin und Cos FKt.

  Anwendungen:
  - → Beschreibung periodischer Vorgänge Astronom
  - → Wärmeleitungsgleichungen
  - → Signalanalyse.

Def: Eine FKt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch $(T > 0)$ wenn $f(x + T) = f(x) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$.

Üblichster Fall: 2π-periodisch. Wenn f Periode T hat, dann hat $g(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ Periode 2π. Daher beschränken wir uns auf $T = 2\pi$.

- Um für eine konkrete 2π periodische Fkt f "brave" Fkt die Fourierreihe

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)} , \quad (*)$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, bilden zu können, müssen die Koeff a_i, b_i bestimmt werden, die Fourier Koeffizienten.

Hilfreich um a_i, b_i zu bestimmen sind

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx)\, dx = \begin{cases} \pi & , m = n \in \mathbb{N} \\ 2\pi & , m = n = 0 \\ 0 & , m \neq n \quad (m, n \in \mathbb{N}_0) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx)\, dx = \begin{cases} \pi & , m = n \in \mathbb{N} \\ 0 & , m = n = 0 \\ 0 & , m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx)\, dx = 0 \quad , \forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$$

Die kann man leicht beweisen mit Hilfe der Summenforme

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\right]$$

Punkweise & Gleichmäßige Konv. von Reihen
Erinnerung: Die Reihe von FKt $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ heißt punktweise (bzw. gleichmäßig) Konv. gegen $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ wenn die Folge der Partialsummen

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

punktweise, bzw. gleichmäßig gegen $f(x)$ konvergiert.

Frage: Kann man jede "brave" FKt f durch eine Fourierreihe $F(x)$ approxiemieren?

$$\boxed{f(x) \stackrel{!}{=} F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)} \quad (**)$$

Unter diese Annahme, wollen wir heraus finden wie die Fourier Koeff a_n, b_n zu bestimmen haben.

Multiplizieren $(**)$ mit $\cos(m \cdot x)$ und Integration über $[-\pi, \pi]$ =

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(mx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(mx)\right)dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\cos(mx)\right)dx = \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi} \cos(mx)\,dx +$$

Wenn Reihe $(**)$ gleichmäßig Konvergiert gegen f $\Rightarrow$ darf man Σ und $\int$ tauschen

$\lim_{n\to\infty} \int S_n = \int f$

$\lim_n \int S_n = \int \lim S_n = \int f$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx}_{=\pi \text{ wenn } m=n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx}_{0}\right) =$$

$$= a_m \pi \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = a_m \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx} \qquad m = 0,1,2,$$

Multiplizieren (**) mit $\sin(mx)$ und integrieren über $[-\pi,\pi]$

$$\Rightarrow \boxed{b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx} \qquad m = 1,2,\ldots$$

Satz: Falls die Fourierreihe

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

gleichmäßig konvergiert, dann kann man f durch F approximieren und die Koeffi. a_n, b_n kann man aus f so ausrechnen

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \qquad, m = 0,1,2$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \qquad, m = 1,2,\ldots$$

Gerade und ungerade Funktionen

- f gerade $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$
- f ungerade $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

1) f gerade $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} f(x)\sin(nx) \text{ ungerade} \\ f(x)\cos(nx) \text{ gerade} \end{array}\right\} \Rightarrow b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

2) f ungerade $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Satz: Sei f eine 2π-periodische Fkt mit folgenden Eigenschaften
(i) In jedem endlichen Interval $[a,b]$ es gibt nur endlich viele Pkt x, wo f nicht stetig oder diff'bar. (Ausnahmen pkt)
(ii) In allen anderen Punkten, f' - stetig.
(iii) Auch in den Ausnahmen pkt von (i) existieren die links und rechtseitigen Grenzwerte $f(x-)$, $f(x+)$ und deren Ableitungen $f'(x-)$, $f'(x+)$.

- Dann konv. punktweise die Fourierreihe F von f gegen die Fkt.

$$\boxed{\bar{f}(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}}$$

- Ist f überall stetig, dann konvergiert die Fourierreihe F von f gleichmäßig gegen f.

Bsp (1) Sei $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, mit Periode 2π fortgesetzt.

f ist überall stetig $\Rightarrow$ konvergiert gleichmäßig gegen Fourierreihe

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f$ gerade und $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx \underset{P.I}{=} \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2 (\sin nx)'\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\, x^2 \sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} 2x \sin(nx)\,dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\,(-\cos(nx))'\,dx = \frac{+4}{\pi n^2}\, x\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left(\pi\cos(\pi n) - 0\right) - \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}_{0} = \frac{4}{\pi^2}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = (-1)^n \frac{4}{\pi^2}} \quad \boxed{b_n = 0} \quad ; \quad \boxed{a_0 = \frac{2\pi^2}{3}}$$

$n \geq 1$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$\Rightarrow$ Fourierreihe für $f(x)$ lautet

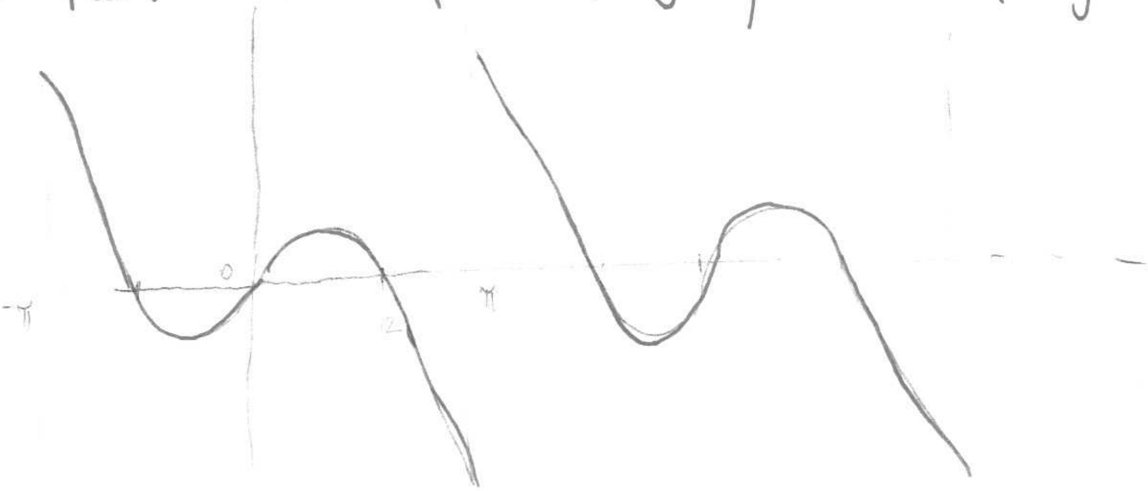
$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2}\right) \quad \text{und}$$

Konvergiert F gleichmäßig gegen f

Daher:

$$f(x) = F(x) \quad , \forall x$$

Bsp (2) $\quad f(x) = x\cos x$ auf $[-\pi, \pi]$ periodisch fortgesetzt



In $x \in \{-\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$ $f(x)$ ist nicht stetig $\Rightarrow$

wir haben nur punktweise Konvergenz

• $f(x)$ ist ungerade $\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \underbrace{\cos x \sin(nx)}_{\frac{1}{2}\left(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\right)} dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin(n+1)x \, dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \sin(n-1)x \, dx = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{2n}{n^2-1}$$

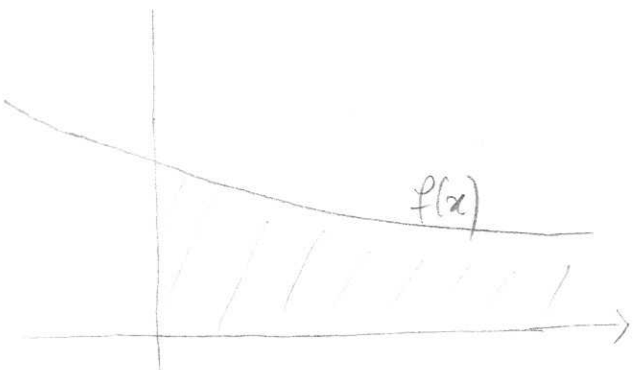
$n = 2, 3, \dots$

$b_1 = \frac{-1}{2}$

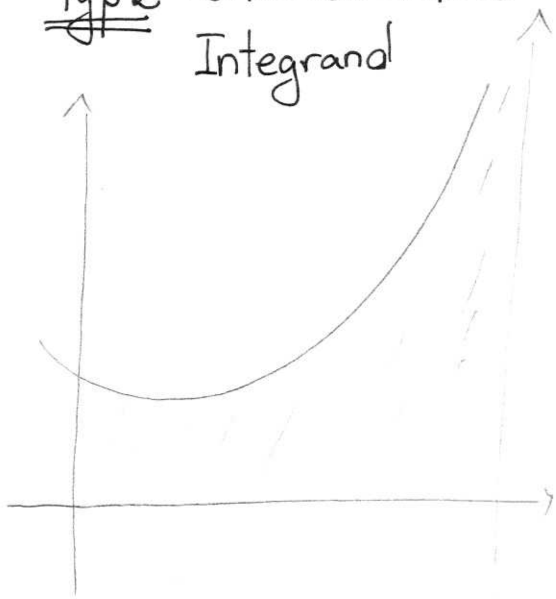
$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2-1} \sin(nx) - \frac{1}{2}\sin x}$$

F8 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Typ 1: Unbeschränktes Integrationsintervall



Typ 2: Unbeschränktes Integrand



Typ 1: UNBESCHRÄNKTES INTEGRATIONSINTERVALL

Def: a) Eine Fkt $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar, wenn für alle $x \in [a,+\infty)$ das Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ existiert.

b) Wenn $f: [a,+\infty)$ lokal integrierbar ist, und

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{x \to +\infty} F(x)$$

existiert, dann heißt $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ konvergent.

Existiert der Grenzwert in (*) nicht, so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ divergent.

c) Def für $(-\infty, a]$ gleich.

d) Wenn $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, dann heißt $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ konvergent, wenn $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ und $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ unabhängig voneinander konvergieren, (a beliebig).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to +\infty}} \int_x^y f(t)\,dt$$

Bsp:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$; $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t \Big|_1^x = \ln x$$

- $F(x)$ exiestiert für alle $x \Rightarrow f$ <u>lokal integrierbar</u>
- <u>Konv oder Div</u>: $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt := \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow$

$\int_1^{\infty} f(t)dt$ divergent.

---

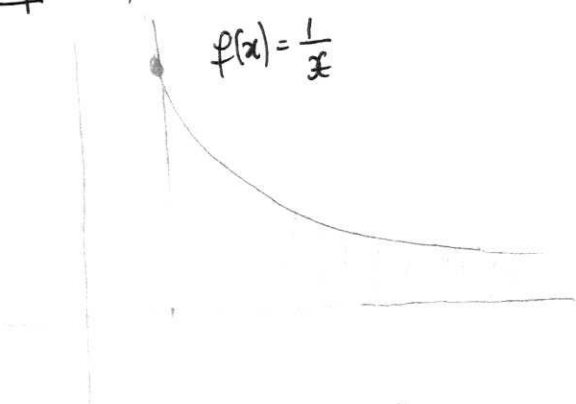
(2) $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = e^x$

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt = \int_x^1 e^t\,dt = e^t \Big|_x^1 = e - e^x < \infty \text{ für alle } x \in (-\infty, 1]$$

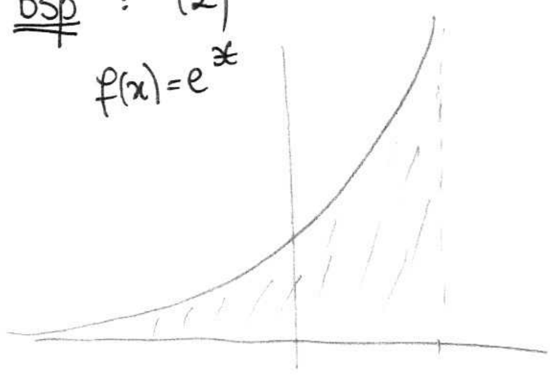
$\Rightarrow f$ <u>lokal integrierbar.</u>

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} (e - \underbrace{e^{+x}}_{0}) = e < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^1 f(t)dt \text{ Konvergiert}$$

Bsp: (1)



Bsp : (2)



Bsp (3) : $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f(-x) = f(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^0 f(x) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt :=$$

$$2 \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(2 \arctan t \Big|_0^x\right) = 2 \lim_{x\to\infty} \underbrace{\arctan x}_{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

F: Wann konvergiert ein uneigentliches Integral?

Satz 1 **Konvergenz Kriterien**

Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ für $f: [a,+\infty) \to [0,+\infty)$

(a) Wenn $f(x)$ lokal integrierbar ist ($F(x)$ existiert) und $F(x)$ beschränkt: $\exists M: F(x) \leq M, \forall x \geq a$, dann konvergiert $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

(b) Wenn $f(x)$ lokal integrierbar ist, und $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ konvergiert $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ konvergent.

Satz 2 (Vergleichskriterium):

Seien $f, g: [a,+\infty)$ lokal integrierbar.

(a) Ist $|f(t)| \leq g(t), \forall t \in [a,+\infty)$ und $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ konvergent $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)$ konvergent und

$$\left| \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

(b) Ist $0 \leq g(t) \leq f(t)\ \forall t$ und $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ divergent $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ divergent.

Bsp: (3) Sei $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x} = g(x) \geq 0$$

$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ divergiert (Bsp 1) $\underset{\text{Satz 2b}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dt$ divergent

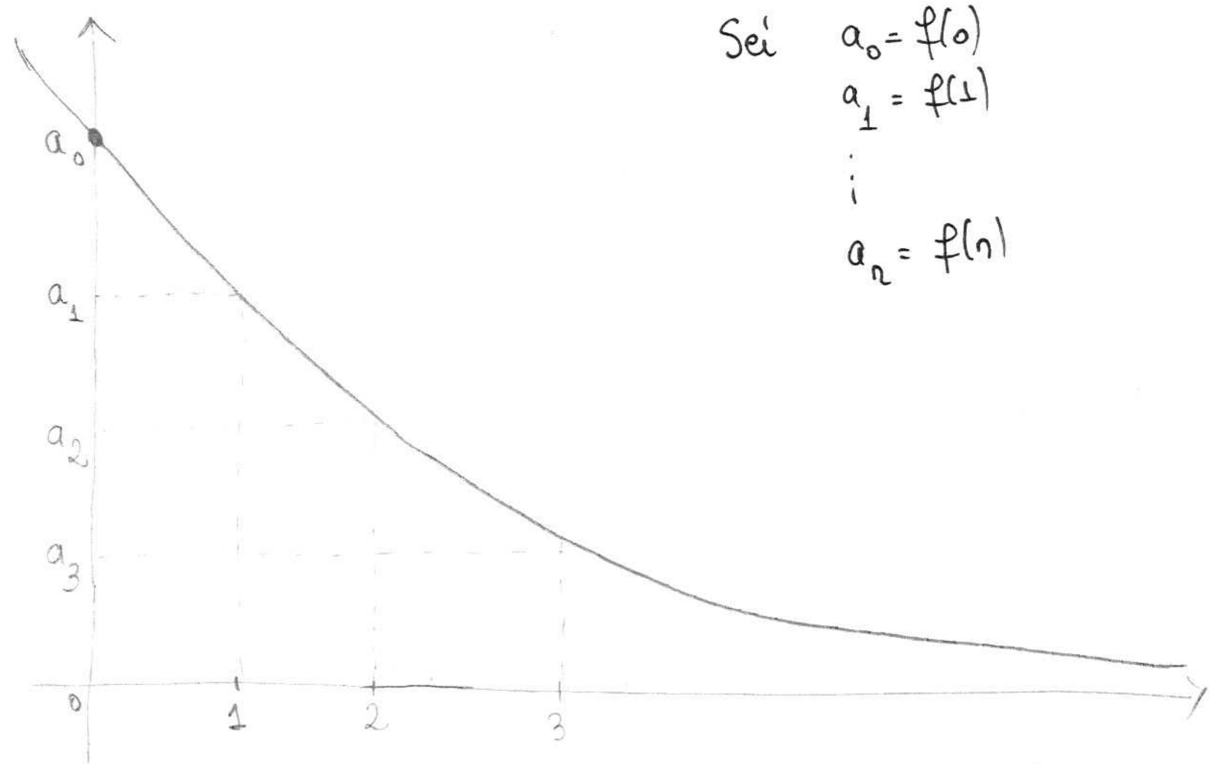
(4) Sei $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$

$$x^2 + 2x + 1 \geq x^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+1} \leq \frac{1}{x^2+1} = g(x)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx \rightarrow \text{Konvergiert (Bsp 3)} \underset{\text{Satz 2a}}{\Longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

Konvergiert.

- Sei $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar, monoton fallend und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$



Sei $a_0 = f(0)$
$a_1 = f(1)$
$\vdots$
$a_n = f(n)$

$0 < 1 < 2 < 3 \;\ldots \rightarrow$ Zerlegung von $[0, +\infty)$

$$a_i = \min_{x[i-1,i]} f(x) = \max_{x \in [i,i+1]} f(x)$$

$\Rightarrow$ Untersumme für $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$: $a_1 + a_2 + \ldots \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

Obersumme für $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$: $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq a_0 + a_1 + \ldots$

Satz [Cauchy' Integralkriterium]:
Sei $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar und monoton fallend.
Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f(i)$ Konvergiert genau dann, wenn $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ Konvergiert

BSP (1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergiert da $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \left(\frac{-1}{t} \Big|_1^x \right) = 1$

Konvergiert.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergiert da $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln t}\,dt := \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{\ln t}\frac{1}{t}\,dt \; \textcircled{=}$

$\ln t = y \Rightarrow \frac{1}{t}\,dt = dy$

$$\textcircled{=} \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{y}\,dy = \lim_{x\to\infty} \left(\ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\ln(\ln x)}_{\infty} - \ln(\ln 2) = \infty \quad \to \text{divergent}.$$

$\boxed{\text{Typ 2}}$: UNBESCHRÄNKTER INTEGRAND

Def: (in a ist $f(a)$ $\pm\infty$)

(a) Eine Fkt. $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>lokal integrierbar</u>, wenn für alle x mit $a < x \le b$, das Integral $\underbrace{\int_x^b f(t)\,dt}_{F(x)}$ existiert

(b) Ist $f: (a,b]$ lokal integrierbar und existiert $\underbrace{\lim_{x\to a_+} \int_x^b f(t)\,dt}_{= \lim_{x\to a_+} F(x)}$, so heißt $\int_a^b f(t)\,dt$ <u>Konvergent</u>. Existiert der Grenzwert nicht, <u>so divergiert</u> $\int_a^b f(t)\,dt$

(c) Def gleich für Fkt f auf $[a,b)$.

(d) Bei Intervalle der Form (a,b) muß das Integral in 2 uneigentliche Integrale aufgespalten werden und der Grenzübergang rechts (in a von rechts) und links (in b von links) unabhängig voneinander durchgeführt werden.

<u>Bsp</u>: (1) $f: (0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Ist $\int_0^1 f(t)\,dt$ divergent oder Konvergent?

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_x^1 t^{-1/2}\,dt = 2t^{1/2}\Big|_x^1 = 2(1-\sqrt{x})$$

$x \in (0,1]$

$F(x)$ existiert $\forall x \in (0,1] \Rightarrow f(x)$ lokal integrierbar.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 0+} F(x) = 2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \to \text{Konvergent}$$

<u>Vergleich Kriterium</u>: Seien $f, g: (a,b] \to \mathbb{R}$, lokal integrierbar.

1) Ist $|f(t)| \leq g(t)$ $\forall\, t \in (a,b]$ und $\int_a^b g(t)\,dt$ Konvergent, dann ist auch $\int_a^b f(t)\,dt$ Konvergent und:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

<u>Konv. Majorante</u>

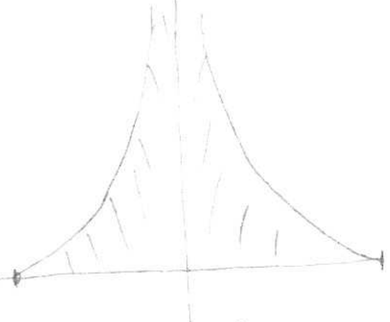
2) <u>Div. Minorante</u>: Ist $0 \leq g(t) \leq f(t)$, $\forall\, t \in (a,b]$ und $\int_a^b g(t)\,dt$ divergent $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt$ auch divergent.

<u>Def</u>: Sei $f: [a,b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, mit $a < x_0 < b$.

Dann $$\int_a^b f(t)\,dt = \underbrace{\lim_{x\to x_0-} \int_a^x f(t)\,dt}_{A} + \underbrace{\lim_{x\searrow x_0} \int_x^b f(t)\,dt}_{B}.$$

und $\int_a^b f(t)\,dt$ Konvergiert, wenn A und B Konvergieren.

z.B f hat einen Pol an der Stelle x_0.



Bsp (1) $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

$x = 0$ Polstelle $\Rightarrow$

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \lim_{x \nearrow 0} \int_{-1}^{x} f(t)\,dt + \lim_{x \searrow 0} \int_{x}^{1} f(t)\,dt = \lim_{x \nearrow 0} \int_{-1}^{x} t^{-2}\,dt +$$

$$+ \lim_{x \searrow 0} \int_{x}^{1} t^{-2}\,dt = \lim_{x \nearrow 0} \left(\underbrace{\frac{t^{-1}}{-1}}_{-\frac{1}{t}} \Bigg|_{-1}^{x} \right) + \lim_{x \searrow 0} \left(\underbrace{\frac{t^{-1}}{-1}}_{-\frac{1}{t}} \Bigg|_{x}^{1} \right) =$$

$$= \lim_{x \nearrow 0} \left(\underbrace{-\frac{1}{x}}_{+\infty} - 1 \right) + \lim_{x \searrow 0} \left(-1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \right) = +\infty \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \text{ divergier}$$

(2) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty \Rightarrow$ Integrand unbeschränkt $\Rightarrow$

$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \to$ uneigentlich von Typ 2.

(2) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ auf $(0,2]$

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \Rightarrow$ Integrand unbeschränkt Typ 2.

Suchen eine div. Minorante.

$\frac{e^x}{x^2} \geq \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$, $\forall\ x \in (0,2]$, da $e^x \geq 1$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} \Bigg|_0^2 = \frac{-1}{x} \Bigg|_0^2 = -\frac{1}{2} + \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$

$\int_0^2 \frac{1}{x^2}$ divergent $\Rightarrow \int_0^2 \frac{e^x}{x^2}\,dx$ divergent.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ = Konvergent oder Divergent

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ Integrand bei $x = 0$ eigentlich.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = +\infty$) UnEigentlich bei $+\infty$

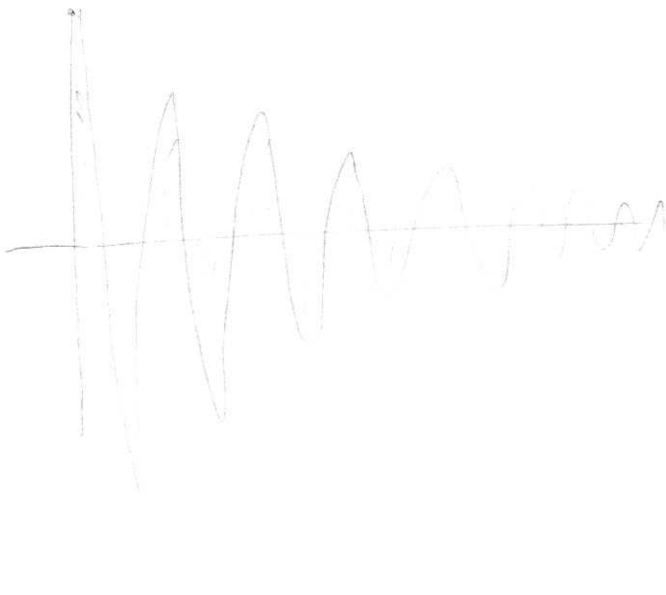
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx}_{<\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad *$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt \overset{\text{P.I}}{=\!=} \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{\cos t}{t} \Big|_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt \right)$$

$$= \cos 1 - \underbrace{\lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt}_{\text{VergleichsKriterium Konv.}}.$$

$\frac{|\cos t|}{t^2} < \frac{1}{t^2}$ und $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^x = \frac{-1}{x} + 1 =$

$= 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$



$\boxed{G}$ FUNKTIONEN IN MEHREREN VARIABLEN

Allgemein: $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Spezielle Fälle

- $\boxed{n = 1}$ $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$: $\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

  Raumkurven in $\mathbb{R}^m$

- $\boxed{m = 1}$ $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\vec{f}(x_1, x_2 \dots x_n)$

  $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

  reelwertige Fkt. in mehrere Variablen.

- $\boxed{m = n = 2}$ Vektorfeld. (Kraftfeld, Fluß)

$\boxed{G1}$ Reelwertige Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ = Skalarfelder

- Reelwertige Fkt von n variablen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

  Schreibweise: $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

  $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$

  D = Definitionsbereich

  $\mathbb{R}$ = Bildbereich ; $f(D) \to$ Bild von f

- $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Pkt $(x_1, \dots, x_n) \in D$ (bzw. Vektor) des Def. bereich in eindeutiger Weise eine reelle Zahl $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zu.

$\underline{n=2}$: $f(x,y)$ statt $f(x_1,x_2)$ } übliche Schreibweise
$\underline{n=3}$: $f(x,y,z)$ statt $f(x_1,x_2,x_3)$ }

$\boxed{n=2}$: $f(x,y)$ beschreibt eine Fläche im Raum $\mathbb{R}$.

durch $\underbrace{\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y)=z \ , (x,y)\in D\}}_{\text{Graph von } f \quad \subset\mathbb{R}^{n+1}}$

Vorteilhaft : f auf gezielt gewählten Teilbereichen von D zu Untersuchen.

n=2

Zum Beispiel: N_c

Höhenschichtlinien (oder Niveaumengen) oder Höhenlinie von f = Kurven wo f Konstant ist.

- $\boxed{N_c = \{(x,y)\in D \mid f(x,y)=c\}}$
- Man nennt $f(x,y)=c$ implizite Gleichung dieser Kurve
- Ist $f(x,y)=c$ explizit nach y auflösbar in der form $y=h(x,c)$ => explizite Darstellung der Niveau-Kurve (Schnittkurve der Fkt.graphen mit Ebene $z=c$)

$\boxed{\text{Bsp (1)}}$ $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$ $D=\mathbb{R}^2$

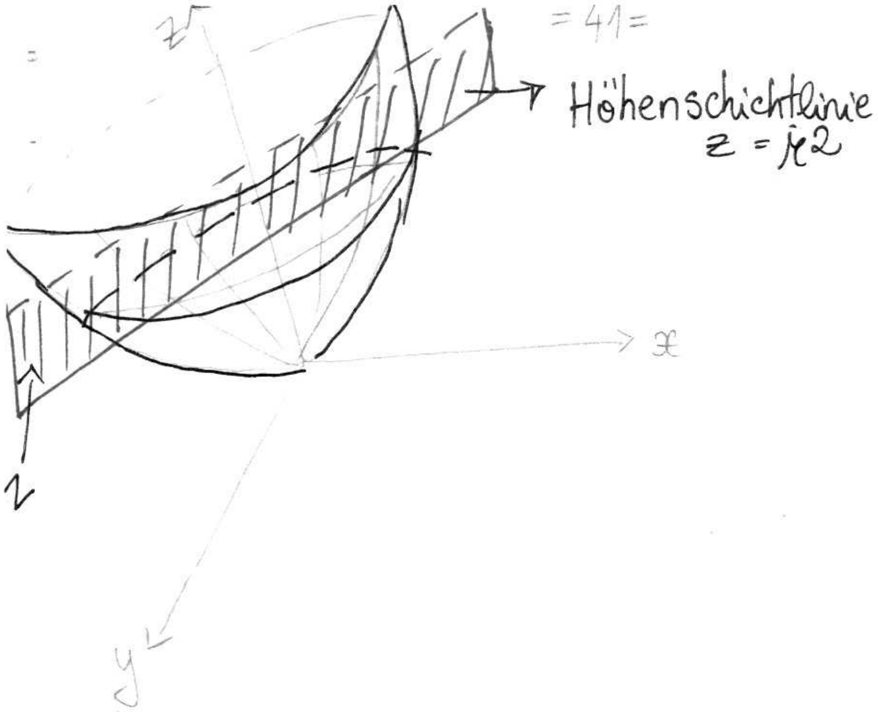
$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$; Graph von f

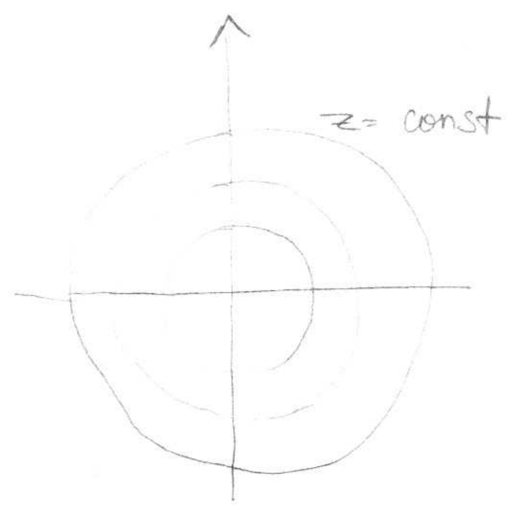
$$G_f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad z=f(x,y)\}$$

$$N_{r^2} = G_f\cap\{z=r^2\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=r^2\}$$

$\downarrow$ kreis radius r $\boxed{N_{r^2}\subseteq\mathbb{R}^2}$

Implizite Gleichung : $x^2+y^2=r^2$





- Explizite Gleichung : nicht durch eine einzige Fkt. darstellbar:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad , -r \le x \le r$$

G2 GRENZWERTE UND STETIGKEIT

Erinnerung (Kapitel D, Mathe A)

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$; $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$

Abstand zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, oder Norm von $\vec{x} - \vec{y}$:

$$\| \vec{x} - \vec{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Def: 1) Offene Kugel im $\mathbb{R}^n$, mit Mittelpunkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$

$$\boxed{\underbrace{U_r(\vec{a})}_{r\text{-Umgebung von } \vec{a}} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \| \vec{x} - \vec{a} \| < r \}}$$

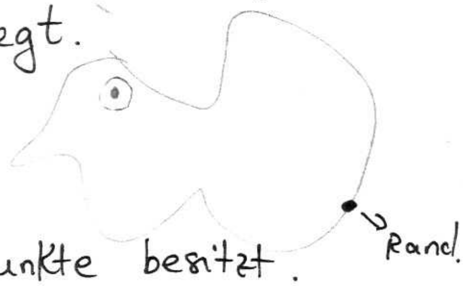
$n = 1$: $U_r(a)$ = offenes Interval $(a-r, a+r)$

$n=2$: $U_r(\vec{a})$ = {Punkten der Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\vec{a}$}

$n=3$ $U_r(\vec{a}) \to$ Kugel im $\mathbb{R}^3 \setminus$ {Oberfläche}

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$

(a) $\vec{a} \in D$ heißt <u>innerer Punkt</u>, wenn es eine offene Kugel mit Mittelpunkt $\vec{a}$ gibt, die ganz in D liegt.



(b) D = offene Menge, wenn D nur innere Punkte besitzt.

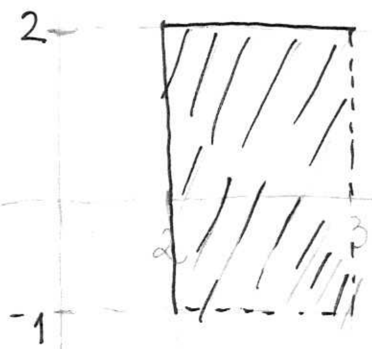
(c) $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Randpunkt von D</u>, wenn jede Kugel um a sowohl Punkte von D und nicht von D enthält.
Rand von $D = \partial D$.

(d) D = <u>abgeschlossene Menge</u>, wenn D alle ihre Randpunkte enthäl

<u>Bemerkung</u>: Es gibt Mengen die weder offen noch abgeschlossen sind.

<u>Bsp (2)</u> Das Rechteck in $\mathbb{R}^2$

$$Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x < 3 \,,\, -1 < y \leq 2 \}$$



- Alle Punkte (x,y) mit $2 < x < 3$, $-1 < y < 2$ } innere Punkte
- Rand von Q enthält Pkt. die zu Q gehören (z.B $(2,y)$: $-1 < y \leq 2$) aber auch Pkt. $\notin Q$ (z.B $(x,-1)$: $2 \leq x \leq 3$

Def: Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{a} \in D \cup \partial D$.

a) f hat in <u>$\vec{a}$ den Grenzwert</u> $c \in \mathbb{R}$, schreibweise

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = c, \quad \left(\text{oder } f(\vec{x}) \to c \text{ für } \vec{x} \to \vec{a}\right)$$

wenn es zu jeder (beliebig kleinen) Schranke $\varepsilon > 0$ eine offene Kugel um a $U_\delta(\vec{a})$ gibt, sodaß $\forall\ \vec{x} \in D \cap U_\delta(\vec{a})$ gilt: $|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon$

(b) f heißt <u>stetig in $\vec{a} \in D$</u>, wenn $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$ ist.
Das heißt: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \forall \vec{x} \in D : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow$
$|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$

(c) f <u>heißt stetig auf D</u>, wenn f in allen Punkten von D stetig ist

<u>Beispiele</u>:

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; Grenzwert in $(0,0)$? $\exists$ oder nicht.

$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$

$\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{xy^2}{2xy}\right| = \dfrac{1}{2}|y| \to 0$, wenn $(y \to 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$; f nicht stetig ; f nicht def in $(0,0)$

<u>Satz</u>: Es gilt $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c \iff$ Für alle Folgen $(x_n, y_n) \neq (a,b)$ mit $x_n \to a$ und $y_n \to b$ gilt
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = c$

(*) Analoge Formulierung für mehr als 2 Variablen.

<u>Bsp</u> (4) Sei $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = ?$

Wir nähern uns auf 2 Arten

Sei $(x_n, y_n) \to (0,0)$ mit $y_n = c \cdot x_n \Rightarrow$

$g(x_n, y_n) = \dfrac{c^2 x_n^3}{x_n^2 + c^4 x_n^4} \to 0$, $x_n \to 0$

Aber für $y_n \to 0$ und $x_n = c y_n^2$

$g(cy_n^2, y_n) = \dfrac{c}{c^2+1} \not\to 0$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ existiert nicht

• Bei allen Annäherungen das gleiche Resultat soll entstehen.

Vektorfelder: $\boxed{\text{Allgemeiner } \vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{a} \in D \cup \partial D$.

Def

(a) $\vec{f}$ hat in $\vec{a}$ Grenzwert $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = c \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f_j(x_1, \dots, x_m) = c_j$ $\forall j = 1, \dots, m$

(b) $\vec{f}$ stetig in $\vec{a}$ wenn jede der Fkt f_j in $\vec{a}$ stetig ist.

(c) $\vec{f}$ stetig in D, wenn $\vec{f}$ in allen Punkten von D stetig ist.

Satz: (! $\boxed{\text{nicht auf dem Tafel}}$ → Skript G-5)

(a) Die Projektionen: $P_i^\circ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $P_i^\circ(x_1, \dots, x_n) = x_i^\circ$, $i = 1, \dots, n$ sind stetig.

(b) Summen und (Skalar)-Produkte stetiger Fkt. sind stetig.
D.h. sind $\vec{f}, \vec{g} : D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ stetig in $\vec{a} \in D$, dann sind auch $\vec{f} + \vec{g} : D \to \mathbb{R}^m$ und $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle : D \to \mathbb{R}^m$ stetig,

wobei $\vec{f} + \vec{g} = \begin{pmatrix} f_1 + g_1 \\ \vdots \\ f_m + g_m \end{pmatrix}$; $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_m g_m$

(c) Der Quotient zweier stetiger, reelwertiger Fkt. ist stetig, wenn der Nenner $\neq 0$ ist.

(d) Die Verknüpfung stetiger Fkt. ist stetig, D.h:

Ist $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to E \subseteq \mathbb{R}^m$ stetig in $\vec{a}$, und $\vec{g}: E \to \mathbb{R}^k$ stetig in $\vec{f}(\vec{a})$, dann ist $\vec{g} \circ \vec{f}: D \to \mathbb{R}^k$ stetig in $\vec{a}$, wobei
$$\vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})).$$

Bsp: (5) Polynome $p(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j \to$ stetig auf $\mathbb{R}^2$.

(6) Das Vektorfeld
$$\vec{f}(x,y) = \frac{1}{xy} \begin{pmatrix} e^{x/y} \\ \ln(x+y) \end{pmatrix}$$
ist auf
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, y \neq 0, x+y > 0\}$$
stetig

G.3 PARTIELLE ABLEITUNGEN

Def: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ innerer Punkt. Existiert die Ableitung der partiellen Funktion
$$x_i \longmapsto f(a_1, \dots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$
an der Stelle $\boxed{x_i = a_i}$, so nennt man sie partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle $\vec{a}$, oder im Punkt $\vec{a}$.

Schreibweise: $\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x} = \vec{a}}}$ oder $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})}$ oder $\boxed{f_{x_i}(\vec{a})}$

Also:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(x_1, \dots, x_i + t, \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \right]$$

Falls in $\vec{a}$ alle partiellen Ableitungen existieren, so heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Nabla Operator

der Gradient von f in $\vec{a}$.

<u>Def</u>
- f heißt <u>partiell diff'bar</u> wenn alle partiellen Ableitungen existieren.
- Falls $\nabla f(\vec{x})$, $\forall\ \vec{x} \in D$ existiert, $\Rightarrow$

  $\vec{x} \longmapsto \operatorname{grad} f(\vec{x}) \rightarrow$ <u>Vektorfeld.</u>

<u>Beispiele</u>

(1) $f(x,y) = x^2 y^3 + y \ln x$

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + \frac{y}{x}$

$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + \ln x$

Weg lassen

(2) $f(x,y) = x^2 y + x \sin y + x^y$

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2xy + \sin y + y x^{y-1} \\ x^2 - x \cos y + x^y \ln x \end{pmatrix}$$

(3) $f(x,y) = \frac{x}{y}$; $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$

(4) $f(x,y) = x^y$; $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y x^{y-1} \\ x^y \ln(x) \end{pmatrix}$

Potenzfunktion

Bsp: $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$

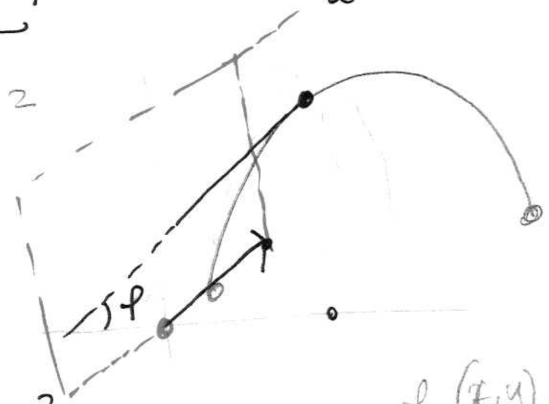
$f_x(1,2) = ?$

- $y \to$ fest halten

$f(x,y) = \underbrace{(9-y^2)}_{c} - x^2 \Rightarrow f_x(x,y) = -2x \;;\; f_x(1,2) = -2$

$-2 = \tan(\varphi)$

$g(x) = c - x^2$



$f_x(x,y) = \langle (1,0), \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rangle = -2x$

$f_y(x,y) = \langle (0,1), \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rangle = -2y$

$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{R}^2$

$\|\vec{v}\| = 1$

$f_{\vec{v}}(1,2) = ?$ $\quad \nabla f = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$

$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

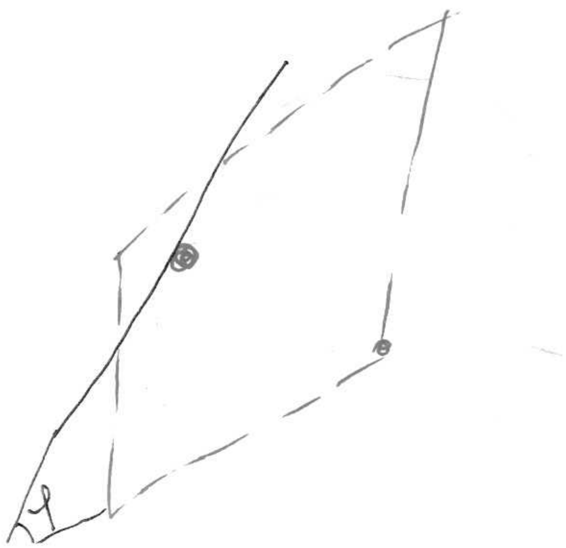
$\partial_{\vec{v}} f(1,2) = \langle \vec{v}, \nabla f(1,2) \rangle = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-6}{\sqrt{2}}$

$= \frac{-6}{\sqrt{2}}$

$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{2}} x - \frac{2}{\sqrt{2}} y$

Schneide G_f mit Ebene $\to$ parallel zu z-Achse it durch die Gerade $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



G4. RICHTUNGSABLEITUNGEN

- Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ geben die momentane Änderung der Funktionswerte in Richtung der Koordinatenachsen (d.h in e_i-Richtung) an. Es wäre unvernünftig, sich auf diese Richtungen einzuschränken. $f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Def: Zu jedem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ $\|\vec{v}\| = 1$ nennen wir den Grenzwert

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(\vec{x} + t\vec{v}) - f(\vec{x})\right]}$$

(sofern er existiert) die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x} \in D$ in Richtung $\vec{v}$ (längs $\vec{v}$)

= Anstieg von f an der Stelle $\vec{x}$ längs $\vec{v}$.

$$\begin{cases} \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \text{ nimmt in Richtung } \vec{v} \text{ zu} \\ \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \text{ nimmt in Richtung } \vec{v} \text{ ab} \end{cases}$$

Satz: Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}$ ein innerer Punkt von D. Falls ∇f in einer Kreisscheibe $U_r(\vec{x}) \subseteq D$ existiert und stetig ist, so gilt für jede Richtungsableitung in $\vec{x}$

$$\boxed{\underbrace{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x})}_{f_{\vec{v}}(\vec{x})} = \langle \vec{v}, \nabla f(\vec{x}) \rangle}$$

insbesondere: falls $\nabla f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ so ist $\frac{1}{|\nabla f(\vec{x})|} \nabla f(\vec{x})$ die Richtung der größten Richtungsableitung.

(= größten Veränderung = größten Anstiegs).

Bemerkung:
- Bei Fkt. mit einer Variable gibt die Ableitung $f'(x_0)$ an einer Stelle x_0 an, wie sich der Fktswert verändert, wenn wir von dieser Stelle ein wenig "nach links" oder "nach rechts" gehen.
- Wenn wir mehrere Var. haben, können wir uns nicht nur in die x-Richtung nach "links" oder nach "rechts" im Koordinatensystem bewegen, sonder auch in andere Richtung

Bsp:

siehe Seite 47

G4. TOTALE DIFFERENTIERBARKEIT

Bsp: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ,\ (x,y)\neq 0\\ 0 & ,\ (x,y)=0\end{cases}$

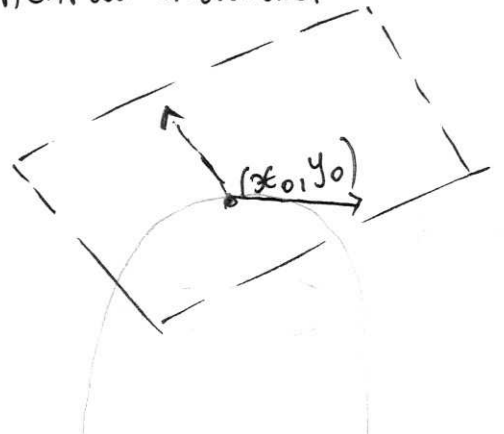
- Im $(0,0)$ f ist nicht stetig $\Rightarrow$ nicht
- Richtungsableitung in $(0,0)$ in Richtung (a,b)

$$\partial_{(a,b)}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[f\big((0,0)+t(a,b)\big)-f(0,0)\Big]=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[\frac{ta\,t^2b^2}{t^2a^2+t^4b^4}\right]=\lim_{t\to0}\frac{ab^2}{a^2+t^2b^4} \ (=)$$

$$(=)\ \partial_{(a,b)}f(0,0)=\langle(a,b),\nabla f(0,0)\rangle=\begin{cases}\dfrac{b^2}{a} & ,\ a\neq 0\\ 0 & ,\ a=0\end{cases}$$

ist im $(0,0)$ nicht stetig.

$\Rightarrow$ Bemerkung: Die Differenzierbarkeit in alle Richtungen ist nicht die richtige Erweiterung der Diff'keit von ein- zum mehrdimensionalen Fall. $\rightarrow$ totale Diff'barkeit eingeführt.



Gleichung der Tangentialebene

$\begin{cases}\text{Ebene durch } f(x_0,y_0)\\ \rightarrow\text{Richtung gegeben durch}\\ f_x(x_0,y_0) \text{ und } f_y(x_0,y_0)\end{cases}$

$$\rightarrow \boxed{z=f(x_0,y_0)+\left\langle\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}f_x(x_0)\\ f_y(y_0)\end{pmatrix}\right\rangle}$$

Tangentialebene der Fläche $z=f(x,y)$ im Punkt $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

- Diese Ebene soll in der Nähe von (x_0,y_0) die Fläche $f(x,y)$ approximieren.

Def: Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{x}_0$ ein innerer Punkt von D. Dann heißt f in $\vec{x}_0$ (total) differentierbar, wenn f in $\vec{x}_0$ partiell diff'bar ist (also $f_{x_i}(\vec{x}_0)$ existiert, $\forall i = 1, \dots n$) – und wenn gilt:

$$(*) \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = 0$$

$(*)$ = Differentierbarkeitsbedingung

Tangentialebene an f im Punkt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ ist gegeben durch:

$$z = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(x_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$$

- Entsteht f durch Einsetzen diff'baren Fkt einer Variablen ineinander, ist f überall (total) diff'bar, wo f definiert is

Satz
(1) Ist f in $\vec{x}_0 \in D$ total diff'bar, dann ist f stetig
(2) $\vec{x}_0$ innerer Punkt von D. Falls ∇f in eine Kugel $U_r(\vec{x}_0)$ existiert & stetig $\Rightarrow$ f ist in $\vec{x}_0$ (total) diff'bar
(3) Folgerung aus (2): f ist total diff'bar auf D wenn die partiellen Ableitungen stetig sind (auf D)

Def: f heißt stetig diff'bar wenn die partiellen Ableitungen stetig sind.

Bsp: Tangentialebene an $f(x,y) = x^y$ im Punkt $(1,3)$

$$z = f(1,3) + \left\langle \begin{pmatrix} f_x(1,3) \\ f_y(1,3) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3x -$$

$f_x(x,y) = y x^{y-1}$ $\qquad f(1,3) = 1^3 \qquad \begin{pmatrix} f_x(1,3) \\ f_y(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f_y(x,y) = x^y \ln x$

F: Wie untersucht man eine Fkt f auf (totale) differentierbarkeit?

Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im $\vec{x}_0$ (total) diff-bar?
Man kann folgendermaßen vorgehen.

Ist f in $\vec{x}_0$ stetig — Nein → <u>f nicht diff-bar</u> in $\vec{x}_0$.

↓ Ja

Ist f partiell diff-bar in $\vec{x}_0$? — Nein → <u>f nicht diff-bar</u> in $\vec{x}_0$

↓ Ja

Existieren die partiellen Ableitungen von f in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ und sind sie in $\vec{x}_0$ stetig — Ja → f <u>diff-bar in $\vec{x}_0$</u>

↓ Nein

Ist $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \dfrac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \nabla f(x_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\| x - x_0 \|} = 0$?

↓ Ja → f diff-bar in $\vec{x}_0$

↓ Nein → f nicht diff-bar in $\vec{x}_0$

! Ist f in $\vec{x}_0$ (total) diff-bar $\Rightarrow$ f hat in $\vec{x}_0$ eine
° Tangentialebene gegeben durch:

$$z = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), (\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle$$

Bsp: Sei $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Ist f total diff-bar?

- Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
  $f(x,y)$ ist aus diff'baren Fkt. zusammengesetzt, und Nenner $\neq (0,0)$ für $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f$ (total) diff'bar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- $(x,y) = (0,0)$

$\boxed{\text{Ist } f \text{ in } (0,0) \text{ stetig ?}}$

Ja

- f in Polarkoordinaten $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin r}{r} = 1 = f(0,0) \Rightarrow f \text{ stetig in } (0,0)$$

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\sin r}{r}$$

$\boxed{\text{Ist } f \text{ in } (0,0) \text{ partiell diff'bar}}$ $\exists$ $f_x(0,0)$ und $f_y(0,0) = ?$

Ja

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin y}{y} - 1}{y} = 0$$

$\boxed{\text{Sind die partiellen Ableitungen von } f \text{ in } (0,0) \text{ stetig ?}}$

Nein

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \neq 0 \Rightarrow f_x \text{ in } (0,0) \text{ nicht stetig}$$

$$\boxed{\text{Ist } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0 \ ?}$$

Ja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\sin r}{r} - 1}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\sin r - r}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos r - 1}{2r} = \lim_{r\to 0} \frac{-\overbrace{\sin r}^{0}}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ f ist in $(0,0)$ (total) diff'bar

$\boxed{G5}$ DIE KETTENREGEL

Satz

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar (part. Ableitungen stetig)
und $\vec{x} : I \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}} D$ eine Kurve in Kurve in $\mathbb{R}^n$: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,
$t \in I \subseteq \mathbb{R}$
die <u>glatt</u> ist ($x_i(t)$ sind alle stetig diff'bar).

Dann gilt :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \\ &= f_{x_1}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{x}_1(t) + f_{x_2}(\vec{x}(t))\, \dot{x}_2(t) + \dots + f_{x_n}(\vec{x}(t))\, \dot{x}_n(t) \\ &= \langle \nabla f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle \end{aligned}}$$

<u>Speziell</u> : $n = 2$ $\quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), x_2(t)) = f_{x_1}(\vec{x}(t))\, x_1'(t) + f_{x_2}(\vec{x}(t))\, x_2'(t)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} f_{x_1}(x(t)) \\ f_{x_2}(x(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

> Die Kettenregel benötigt man immer dann, wenn neue Variable eingeführt werden, und die partiellen Abl. in bezug auf diese Variablen zu berechnen sind

$\boxed{\text{Bsp 1}}$ Sei $f(x,y) = x^2 + 2xy$

Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$

$$f(\underbrace{x(t), y(t)}_{\vec{x}(t)}) = (\cos t)^2 + 2\cos t \sin t$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}(t))\, y'(t) =$$

$$= (2x(t) + 2y(t)) \cdot x'(t) + (2x(t))\, y'(t) =$$

$$= (2\cos t + 2\sin t)(-\sin t) + 2\cos t \cos t =$$

$$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t \quad - 2\sin t \cos t$$

Nach einsetzen: $f(\vec{x}(t)) = \cos^2 t + 2\cos t \sin t$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -2\cos t \sin t + 2\left(-\sin^2 t + \cos^2 t\right) =$$

$$= 2\cos^2 t - 2\sin^2 t - 2\sin t \cos t$$

Allgemeiner Kettenregel:

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar Fkt von $(x_1, \dots, x_n)$.

Weiters seien die Koordinatenfkt g_i von

$$\vec{g} : E \subseteq \mathbb{R}^m \to D \subset \mathbb{R}^n : \quad \vec{g}(t_1, \dots, t_m) = \begin{pmatrix} g_1(t_1, \dots, t_m) \\ \vdots \\ g_n(t_1, \dots, t_m) \end{pmatrix}$$

stetig diff'bar. Dann ist die Zusammengesetzte Fkt. $\boxed{F = f \circ \vec{g} : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$$F(t_1, \dots, t_m) = f\left(g_1(t_1, \dots, t_m), \dots \dots, g_n(t_1, \dots, t_m)\right)$$

$$= f\left(\vec{g}(t_1, \dots, t_m)\right)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^n \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f \circ g"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

auf E auch stetig diff'bar und

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(g_1, \dots, g_n) \cdot \frac{\partial g_i}{\partial t_j}}$$

Koordinatenwechsel: $\to$ Polar Koordinaten in der Ebene

$f(x,y)$ wird durch $\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$ in $F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ übergeführt.

$F_r = ?$ $\qquad F_r = \left\langle \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} \right\rangle$

$F_\varphi = ?$ $\qquad F_\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_\varphi \\ y_\varphi \end{pmatrix} \right\rangle$

Bsp Kugelkoordinaten im Raum

$f(x,y,z)$ wird durch $x = r\cos\varphi \sin\theta$ $\quad r \geq 0$

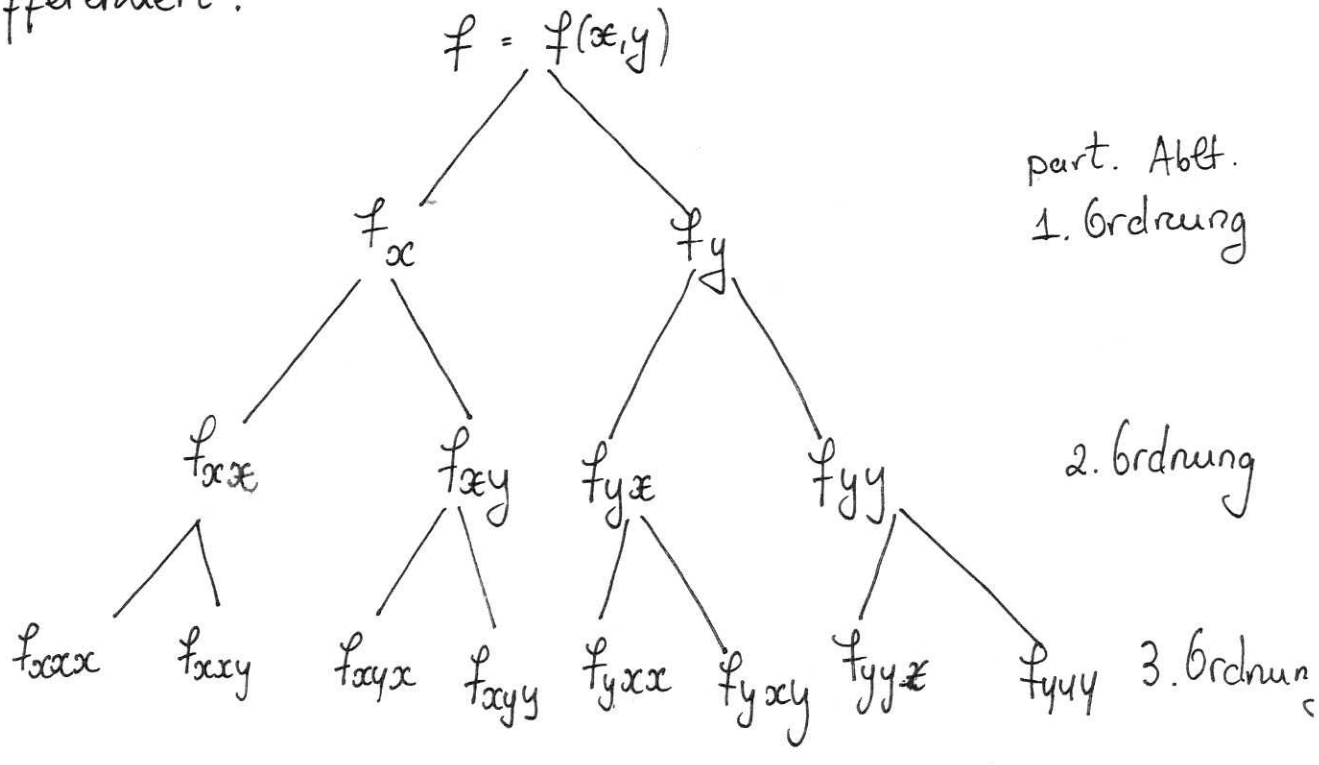
$y = r \sin\varphi \sin\theta$ $\quad \varphi \in [0, 2\pi]$

$z = r\cos\theta$ $\quad \theta \in [0, \pi]$

in $F(r, \varphi, \theta) = f(r\cos\varphi\sin\theta, \; r\sin\varphi\sin\theta, \; r\cos\theta)$ übergeführt.

G6. HÖHERE PARTIELLE ABLEITUNGEN

- Partielle Ableitungen höherer Ordnung: eine Fkt von mehrere Variablen wird mehrmals nacheinander partiell differentiert.



- Die einzelnen Differentiationschritte sind grundsätzlich in der Reihefolge, in der die als Indizes im Ableitungssymbol auftreten, auszuführen. (von links nach rechts gelesen)

$\rightarrow f_{xx}, f_{xxx}, \ldots$; $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$; $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$

Reine partielle Ableitungen

$$\boxed{f_{\underbrace{xx\ldots x}_{n\text{-mal}}} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}}$$

- $f_{xy}, f_{xyx} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$

- $f_{xyz} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$

f_{xy}, f_{xyx} : <u>gemischten partiellen Ableitungen</u>
[Reihefolge Kann, unter Vorraussetzungen, vertauscht werden]

★ <u>Ordnung</u> einer part. Ableitung = Anzahl der Indizes.

Bsp 1: $\boxed{f(x,y) = \ln(x^2+y)}$

$f_x = \frac{2x}{x^2+y}$; $f_{xy} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$; $f_{xx} = \frac{2(x^2+y) - 4x^2}{(x^2+y)^2}$

$f_y = \frac{1}{x^2+y}$; $f_{yx} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$; $f_{yy} = \frac{-1}{(x^2+y)^2}$

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$$

Bsp 2 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Berechnen Sie $f_{xy}(0,0)$ und $f_{yx}(0,0)$ = ?

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y-0}{y} = 1 \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

Wenn $(x,y) \neq (0,0)$: $f_{xy} = f_{yx}$

Warum? Weil part. Ableit. 2. Ordnung nicht stetig sind.

Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit gemischter part. Ableitungen)

Für jede Fkt $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit stetigen part. Ableitungen 1. und 2. Ordnung, gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i} \qquad (1 \le i, j \le n)$$

D.h.: f 2-mal stetig diff'bar

Wenn f k-mal stetig diff'bar ist (part. Ableitungen 1, 2, ... k-ter Ordnung sind stetig), dann bei einer gemischten part. Ableitung. k-ter Ordnung darf die Reihefolge der Indizes vertauscht werden.

G7. TAYLORFORMEL 2. ORDNUNG

Erinnerung (Taylorformel)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diff'bar, $x_0 \in [a,b]$, $x_0 + h \in [a,b]$

dann $\exists\, \delta \in (0,1)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\frac{f'(x_0)}{1!} + h^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \underbrace{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \delta h)}_{\text{Restglied}}$$

=59=

Def [Hesse-Matrix von $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$]

Wenn f 2-mal stetig diff-bar ist, dann ist die Hesse-Matrix H_f definiert durch

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

H_f = Matrix der part. Ableitungen 2. Ordnung

Satz [Taylorformel 2. Ordnung]

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar, $\vec{x}$ ein innerer Punkt von D und $U_r(\vec{x}) \subseteq D$. Dann ist für $\|\vec{h}\| < r$

$$(*) \quad f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + \langle \vec{h}, \nabla f(\vec{x}) \rangle + \frac{1}{2}\langle \vec{h}, H_f(\vec{x})\vec{h} \rangle + \underbrace{\mathcal{E}_2(\vec{h})}_{\text{Restglied}}$$

wobei $\lim\limits_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\mathcal{E}_2(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0$

(*) = Approx. 2. Grades an f in der Umgebung von $\vec{x}$.

Bsp: Sei $f(x,y) = \sin(x+y^2)$

Taylorentwicklung von f um $(0,0)$ = ?

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y^2) \\ 2y\cos(x+y^2) \end{pmatrix}$$

=60=

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y \sin(x+y^2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ da part. Ablt. 1. und 2. Ordnung stetig sind (Satz von Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x+y^2) + 2y(-\sin(x+y^2)) \cdot 2y =$$
$$= 2\cos(x+y^2) - 4y^2 \sin(x+y^2)$$

$$\boxed{H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x+y^2) & -2y\sin(x+y^2) \\ -2y\sin(x+y^2) & 2\cos(x+y^2) - 4y^2\sin(x+y^2) \end{pmatrix}}$$

Taylor formel

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \nabla f(0,0) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \mathcal{E}(\|(x,y)\|^2)$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad H_f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} \right\rangle + \mathcal{E}(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = x + \frac{1}{2} 2y^2 + \mathcal{E}(\|(x,y)\|^2)}$$

(*) Für Entwicklung um $(0,0)$

$$\boxed{f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + \langle \vec{x}, \nabla f(\vec{0}) \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x}, H_f(\vec{0}) \cdot \vec{x} \rangle + \mathcal{E}(\|\vec{x}\|^2)}$$

G.8 EXTREMWERTE : MAXIMA UND MINIMA

Def: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat im D ein absolutes Max im Punkt $\vec{x}_0$ falls $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in D$ und ein abs Min falls $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \; \forall \vec{x} \in D$.

Def: f hat im $\vec{x}_0$ ein relatives Maximum, wenn es eine Umgebung $U_r(\vec{x}_0)$ gibt wo

$$f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \quad , \forall \; \vec{x} \in U_r(\vec{x}_0) \quad \text{und.}$$

rel Minimum : falls $f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}), \forall \; \vec{x} \in U_r(\vec{x}_0)$.

(lokales Minimum & lokales Maximum

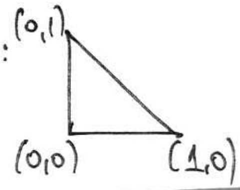
Def: $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt Kompakt, wenn D abgeschlossen und beschränkt

z.B $\to$ abgeschlossene Kugeln

$$\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r \}$$

$\to$ Parallelippede

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$\to$ Dreieck :  $D = \{ x \geq 0, y \geq 0 \; , x + y \leq 1 \}$

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ Kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists \; \vec{a}, \vec{b} \in D$ sodaß

$$f(\vec{a}) = \max_{\vec{x} \in D} f(\vec{x}) \quad \text{und} \quad f(\vec{b}) = \min_{\vec{x} \in D} f(\vec{x})$$

- Max und Min (absolute) wird im D angenomen.

- Was machen wenn D nicht Kompakt ist? aber $f: D \to \mathbb{R}$ partiell diff'bar? Gibt es Min und Max?

Satz: Ist $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Inneren von D partiell diff'bar und $\vec{a}$ ein innerer Punkt von D, wo f ein Extremum hat, dann $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

Notwendiges Kriterium

Nicht hinreichend

- Umgekehrt gilt nicht, d.h wenn $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$, $\vec{a}$ muss nicht unbedingt Max oder Min sein.

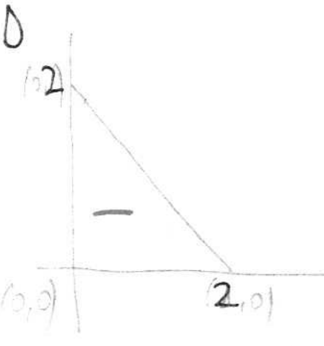
Def: $\vec{a}$ heißt Stationär, wenn $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

- Extremwerte von $f(x,y)$ Können nur in Punkten auftreten in denen
  - [A] die part. Ableitungen verschinden $\nabla f = \vec{0}$] stationäre Punkte
  - [B] die part. Ableitungen nicht existieren. Hierzu gehören die Randpunkte

Bsp: $f(x,y) = xy^2(x+y-2)$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$

$D \to$ Kompakt $\exists$ max & min in D



Am Rand: $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$: $f(x,y)=0$ und im Inneren $f<0$

$\Rightarrow$ Max am Rand.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = (2x+y-2)y^2 = 0 \\ f_y = xy(2x+3y-4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

$f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{4}$ und $(\frac{1}{2}, 1)$ = absolutes Minimum.

Max am Rand: für alle Randpunkte.

(A.) STATIONÄRE PUNKTE

Erinnerung: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ und f zweimal diff-bar

x_0 stationär: $f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0$ (f Konkav) $\Rightarrow$ x_0 Maximum

$f''(x_0) > 0$ (f Konvex) $\Rightarrow$ x_0 Minimum

Was ist $f''(x_0)$ in mehrere Dimensionen?

Hesse-Matrix: gibt die Krümmung in $\mathbb{R}^n$

Def: Eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix A heißt

1) positiv definit: $<\vec{h}, A\vec{h}> > 0$, $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{h} \neq \vec{0}$

2) negativ definit: $<\vec{h}, A\vec{h}> < 0$, " — "

3) indefinit: $\exists \vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$: $<\vec{h}, A\vec{h}> < 0$
$<\vec{k}, A\vec{k}> > 0$

! $\exists$ Matrizen die keine dieser 3 Eigenschaften haben.

Satz: Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, im Inneren von D zweimal stetig diff'bar und $\vec{a} \in D$ ein stationärer Punkt von D ($\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$)

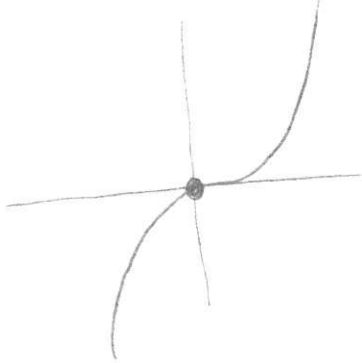
Dann gilt:

1) Ist $H_f(\vec{a})$ positiv definit ($f'' > 0$, konvex) $\Rightarrow \vec{a}$ = rel Min

2) Ist $H_f(\vec{a})$ negativ def ($f'' < 0$, konkav) $\Rightarrow \vec{a}$ = rel. Maximum.

3) $H_f(\vec{a})$ indefinit $\Rightarrow \vec{a}$ - Sattelpunkt (Kein Extremum)

Sattelpunkt



→ die Kurve erreicht einen Punkt wo die Steigung = 0

- Falls $H_f(\vec{a})$ keiner dieser 3 Eigenschaften hat, kann man den Satz nicht anwenden.

! Wie überprüft man ob eine Matrix A, positiv oder negativ definit ist?

$\boxed{n=2}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

- $\det A > 0$ und $a_{11} > 0 \Rightarrow$ <u>A positiv def.</u>
- $\det A > 0$ und $a_{11} < 0 \Rightarrow$ <u>A negativ. def.</u>
- $\det A < 0 \Rightarrow$ indefinit.

$\boxed{n=3}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $A_1 = (a_{11})$; $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

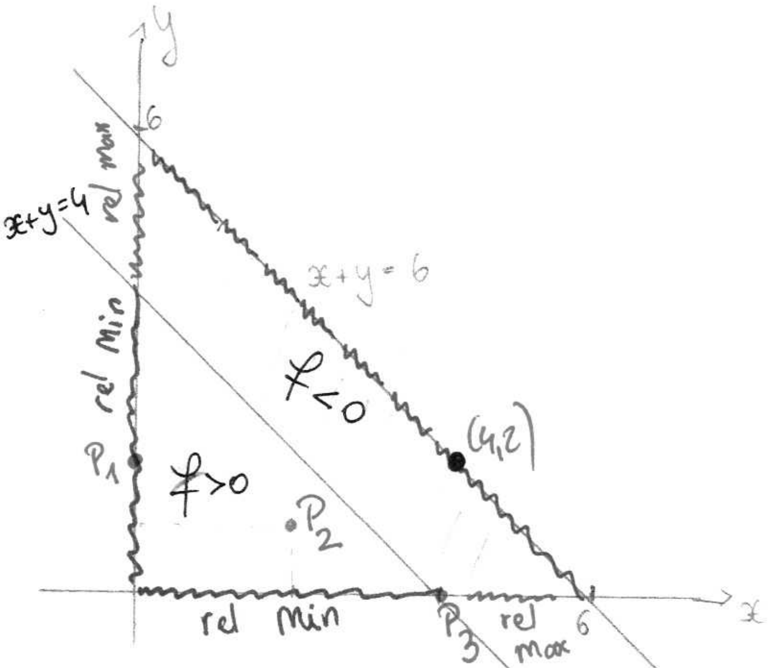
- $\det A_1 > 0$, $\det A_2 > 0$, $\det A > 0 \Rightarrow$ A <u>positiv def.</u>
- $\det A_1 < 0$, $\det A_2 > 0$, $\det A < 0 \Rightarrow$ A <u>negativ def</u>
- $\det A \neq 0$ und keine von der beiden ersten Bed. gilt $\Rightarrow$ A indefinit

KV 15/01/2018

Bsp: Bestimmen Sie die Extrema (rel und Absolute) für $f(x,y)$ gegeben durch:

$$f(x,y) = yx^2(4-x-y)$$

im Dreieck, begrenzt durch die Geraden. $x=0$, $y=0$, $x+y=6$



Praktisches Vorgehen

$\boxed{A}$ Stationäre Punkte

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$f(x,y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$$

$$f_x(x,y) = 8xy - 3x^2y - 2xy^2$$

$$f_y(x,y) = 4x^2 - x^3 - 2x^2y$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(8-3x-2y) = 0 \Rightarrow (4-2y)\,y\,(8-3(4-2y)-2y) = 0 \; (*) \\ x^2(4-x-2y) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ oder } 4-x-2y = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow$ Nur Randpunkte

$4 - x - 2y = 0 \Rightarrow x = 4-2y$

$(*) \Rightarrow$
- $4-2y=0 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=0}$
- $8-12+6y-2y=0 \Rightarrow 4y=4 \Rightarrow \boxed{y=1} \rightarrow \boxed{x=2}$
- $y=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$

$\Rightarrow$ Punkte:

$(0,2) = P_1$ ✓ rel Min.

$(2,1) = P_2$ ✓ rel Max

$(4,0) = P_3$ ✓ Kein Extrema

$(0,y) \rightarrow P_4$ ✓ rel Max oder Min.

- Nur $P_2 \rightarrow$ innerer Punkt von D
- die anderer Punkte müssen anders untersucht werden.

P2 : Hesse Matrix im $(2,1)$

$f_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2$

$f_{yy} = -2x^2$

$f_{yx} = 8x - 3x^2 - 4xy = f_{xy}$ da f 2-mal stetig diff-bar

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(2,1) & f_{xy}(2,1) \\ f_{yx}(2,1) & f_{yy}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-12-2 & 2\cdot 8-12-8 \\ -4 & -2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det H_f(2,1) = 6\cdot 8 - 16 = 32 > 0$, $f_{xx}(2,1) = -6 < 0$ $\Rightarrow H_f \to$ neg. def und.

$\boxed{(2,1) \text{ rel. Maximum}}$

B Randpunkte von f

$(4,0) \to$ Zeichnen die Höhenlinien

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$x=0$: $f(0,y) = 0 \Rightarrow$ $(0,y)$ rel. min $0 \le y < 4$; $(0,y)$ rel Max $4 < y \le 6$.

P1 und P4

$y=4$: $(0,4)$ kein Extremwert, wei jede Umgebung von $(0,4)$: $f<0$ und $f>0$

$\boxed{y=0}$: $f(x,0) = 0 \Rightarrow$ $(x,0)$ rel Min für $0 \le x < 4$; $(x,0)$ rel Max für $4 < x \le 6$

$(4,0) \to$ Kein Extrema.

Was ist am Rand $\boxed{x+y=6}$ ~~$x = 6-y$~~ $y = 6-x$

$f(x,y) = -2x^2(6-x) = -12x^2 + 2x^3$

$f'(x) = 6x^2 - 24x = 0 \Rightarrow$ $x = 0 \Rightarrow (0,6)$; $x = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (4,2)$

$(0,6) \to$ rel Max

Was ist $(4,2) = ?$

$f(4,2) = -64$

Alle anderen rel Min. ist $f = 0 \Rightarrow (4,2)$ ist absolutes Min

Rel max: $\left.\begin{array}{ll} f(2,1) = 4 & \\ f(0,y) = 0 & , 4 < y \leq 6 \\ f(x,0) = 0 & 4 < x \leq 6 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,1)$ Absolutes Max

Zusammenfassung:

rel Max: $\left\{\begin{array}{lll} (0,y) & 4 < y \leq 6 & ; f(0,y) = 0 \\ (x,0) & 4 < x \leq 6 & f(x,0) = 0 \end{array}\right.$

abs Max: $(2,1)$ $f(2,1) = 4$

rel Min: $(0,y)$: $0 \leq y < 4$; $f(0,y) = 0$

$(x,0)$: $0 \leq x < 4$ $f(x,0) = 0$

abs Min: $(4,2)$ $f(4,2) = -64$.

Wie untersucht man die Randpunkte?

- Zeichnung der Höhenlinien $f(x,y) = f(x_0,y_0)$
- Anwendung Satz von Weierstraß (Kompakte Menge)
- Direkte Berechnung von $f(x,y) - f(x_0,y_0)$
- Schnitt mit bestimmten Flächen.

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen der Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy - xy^2 + y^2.$$

Lösung: Zunächst werden die stationären Punkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y - y^2 \\ x^2 - x - 2xy + 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}.$$

Also muß gelten:

$$\begin{aligned} 2xy - y - y^2 &= 0, \qquad (1) \\ x^2 - x - 2xy + 2y &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Falls $y = 0$ ist, so wird (1) zu "$0 = 0$" und Gleichung (2) zu

$$x^2 - x = 0, \quad \text{d.h. } x(x-1) = 0, \quad \text{d.h. } x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Also sind $P_1 = (0,0)$ und $P_2 = (1,0)$ stationär!

Nun betrachten wir den Fall $y \neq 0$ und kürzen in Gleichung (1) durch y und erhalten:

$$2x - 1 - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 2x - 1.$$

Dies setzen wir in Gleichung (2) ein:

$$x^2 - x - 2x \cdot (2x-1) + 2 \cdot (2x-1) = 0$$

$$\Longrightarrow \; x^2 - x - 4x^2 + 2x + 4x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \; -3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow \; x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-6} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-6} = \frac{2}{3} \\ \frac{-5-1}{-6} = 1 \end{cases}$$

Also sind auch die Punkte

$$P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \; P_4 = (1,1)$$

stationär!

Zur Bestimmung der Typen der stationären Punkte berechnen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1-2y \\ 2x-1-2y & -2x+2 \end{pmatrix}.$$

Typbestimmung der stationären Punkte:

1. $P_1 = (0,0)$**:** Es ist
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(0,0) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(0,0)$ indefinit. Somit ist P_1 ein **Sattelpunkt**.

2. $P_2 = (1,0)$**:** Es ist
$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(1,0) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(1,0)$ indefinit, und somit ist P_2 ein **Sattelpunkt**.

3. $P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$**:** Es ist
$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
Da
$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0 \quad \text{und} \quad \det H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0,$$
ist $H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ positiv definit. Somit ist P_3 ein **Minimum**.

4. $P_4 = (1,1)$**:** Es ist
$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\det H_f(1,1) = 0 - 1 = -1 < 0$, ist $H_f(1,1)$ indefinit, und somit ist P_4 ein **Sattelpunkt**.

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten im Mehrdimensionalen:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + y.$$

Lösung: Zunächst werden die Extrempunkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy + 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

D.h.

$$\begin{aligned} 2xy - y^2 &= 0, \\ x^2 - 2xy + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Falls $y = 0$ ist, muss gelten: $x^2 + 1 = 0$, ein Widerspruch, d.h. wir können $y \neq 0$ annehmen! Das obige Gleichungssystem wird also durch Kürzen von y zu

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x^2 - 2xy + 1 &= 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$y = 2x \qquad \text{und} \qquad 0 = x^2 - 2x \cdot \underbrace{2x}_{=y} + 1 = x^2 - 4x^2 + 1 = -3x^2 + 1.$$

Also:

$$3x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Die stationären Punkte (=Extrempunkte) sind also:

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right), P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Zur Bestimmung der Typen der stationören Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

- **Typ von P_1:**

$$H_f\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Da

$$H_f\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{3} = -4 < 0,$$

ist die Hesse-Matrix an der Stelle P_1 indefinit, d.h. P_1 ist ein **Sattelpunkt**.

- **Typ von P_2:**

$$H_f\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Da

$$H_f\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{3} = -4 < 0,$$

ist die Hesse-Matrix an der Stelle P_2 indefinit, d.h. P_2 ist ein **Sattelpunkt**.

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y,z) = -\ln(x^2+y^2+z^2+1).$$

Lösung: Zunächst werden die Extrempunkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \\ -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} \\ -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Es muss also gelten:

$$x = y = z = 0,$$

d.h. der einzige stationäre Punkt ist $P = (0,0,0)$.

Wir bestimmen nun den Typ von P:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-2(-x^2+y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \\ \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{-2(x^2-y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \\ \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{-2(x^2+y^2-z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

Wir werten nun die Hesse-Matrix im Punkt P aus:

$H_f^{(1)}$

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$H_f^{(2)}$

D.h. $\det H_f(0,0,0) = -8 < 0$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \det H_f^{(1)}(0,0,0) &= -2 < 0 \quad \text{und} \\ \det H_f^{(2)}(0,0,0) &= 4 > 0. \end{aligned}$$

Also ist $H_f(0,0,0)$ negativ definit. Somit liegt bei P ein **relatives Maximum** vor.

Mittelpunkt (x_0, y_0) : r

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$(x_0, y_0)=\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

B. EXTREMA MIT NEBENBEDINGUNGEN

<u>Gesucht</u>: Extrema (Max oder Min) von f auf der Menge

$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{g_1(\vec{x}) = 0, \ \dots \ g_m(\vec{x}) = 0}_{\text{Nebenbedingungen}}\}$$

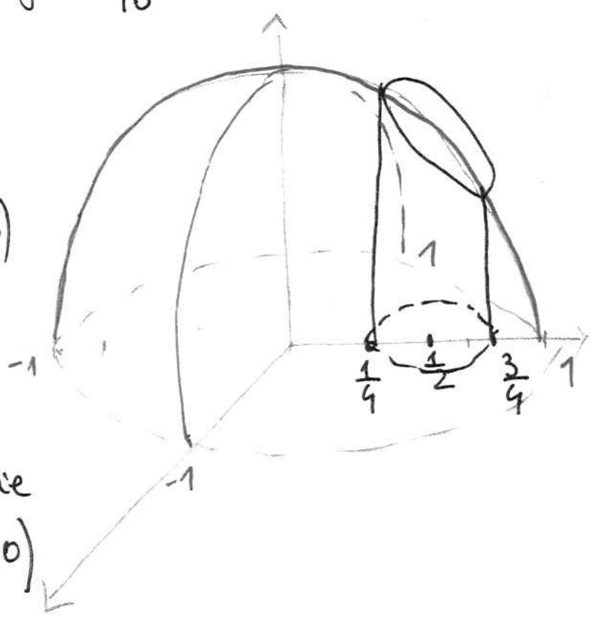
Wir behandeln den Fall $\boxed{m=1}$ (nur eine Nebenbedingung)

> Gesucht die Punkte auf der Kurve $g(\vec{x}) = 0$ in denen f ein Extremwert hat.

<u>Bsp</u>: Sei $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Extrema von f under die Bedingung $g(x,y) = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{16} = 0$

$f(x,y) \to$ Kugelschall über x,y-Ebene mit Radius 1

$g(x,y) = 0$: Kreis Mittlepunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und Radius $\frac{1}{4}$

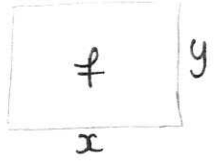


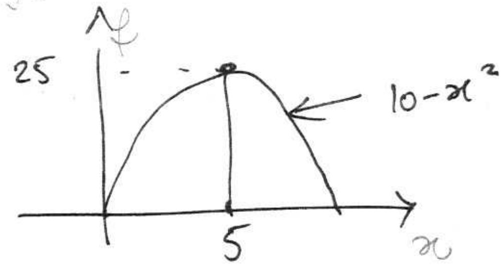
- Anschaulich: Max von f auf der Kugelfläche über der Kreislinie liegt: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$; Min bei $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

> Bestimmung von Extrema

(1) Einsetzen: löst man $g(\vec{x}) = 0$ nach eine Variable aus, und setzt die Variable in $f(\vec{x})$

<u>Bsp</u>: Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang $U = 20$ cm die grösste Fläche?





$f(x,y) = x \cdot y$

__NB:__ $2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x$

$0 \leq x \leq 10$

$f(x,y) = x(10-x)$; $\max\limits_{0 \leq x \leq 10} f(x,y) = ?$

$f'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

Rand kann nicht max sein $(y = 0) \Rightarrow x = y = 5 \Rightarrow$ max. Fläche

LAGRANGE MULTIPLIKATOREN

__Satz:__ Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (D-offen) stetig diff-bar.
Ist $\vec{a} \in D$ Lösung des Problem

$$\begin{cases} \max \text{ (oder min) } f(\vec{x}) \\ NB: \; g(\vec{x}) = 0 \quad \text{mit } \nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0} \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\nabla f(\vec{a}) + \lambda \nabla g(\vec{a}) = 0} \quad (*)$$

$\lambda =$ Lagrange Multiplikator.

$(*) \Leftrightarrow \nabla f(\vec{a}) = -\lambda \nabla g(\vec{a}) \Rightarrow$ Die 2 Vektoren $\nabla f(\vec{a})$ und $\nabla g(\vec{a})$ sind parallel.

Vorgangsweise: Man sucht die stationären Punkte der Lagrange-Fkt:

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda \, g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

• D.h.

$$\circledast \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = g(x,y) \end{cases}$$

→ aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Stat. Punkte. bestimmen.

<u>Bemerkungen</u>:

- λ ist eine Hilfsvariable, ohne Bedeutung.
  → schnell los werden
- Die Bedingungen ⊛ notwendig aber nicht hinreichend für die Existenz eines Extremwertes under der NB $g(x,y)=0$
Es muss daher von Fall zu Fall geprüft werden ob auch tatsächlich ein Extremwert vorliegt.

Allgemeiner Fall (mehrere NB)

<u>Satz</u>: Seien $f, g_1, \dots, g_m : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ (D offen, $m<n$) stetig diff'bar. Ist $\vec{a}$ Lösung des Problems

$$\begin{cases} \max f(\vec{x}) \\ NB: g_1(\vec{x})=0, \dots, g_m(\vec{x})=0 \end{cases}$$

mit linear unabhängigen Gradienten $\nabla g_1(\vec{a}), \nabla g_2(\vec{a}), \nabla g_m(\vec{a})$ so gibt es $\lambda_1 \dots, \lambda_m$:

$$\boxed{\nabla f(\vec{a}) + \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\vec{a}) = 0}$$

<u>Konkret</u>: Man sucht die Stat. Pkt. der Lagrange-Fkt.

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_1(x_1, \dots x_n)$$

in den $n+m$ Variablen $x_1 \dots, x_n, \lambda_1 \dots, \lambda_m$.

Bsp: Sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $f(x,y,z) = x - y + 2z$.
Gesucht Extrema von f auf dem Ellipsoid:
$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$

$$\begin{cases} \max\ (\min)\ f(x,y,z) \\ NB: \ g(x) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 \end{cases}$$

$$L(x,y,z,\lambda) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2)$$

$$\nabla L = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} ; y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} ; f(x_1, y_1, z_1) = 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; y_2 = \frac{+\sqrt{2}}{2} ; z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; f(x_2, y_2, z_2) = -2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Da Ellipsoid Kompakt} \\ f \text{ stetig diff'bar}\end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nimmt } \max \text{ und } \min$$

$\Rightarrow$

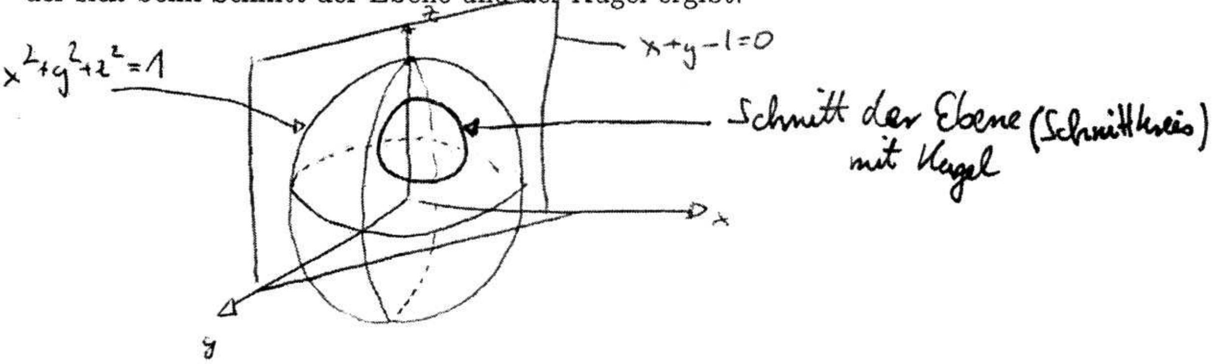
Max : (x_1, y_1, y_1)

Min (x_2, y_2, y_2)

Lagrange-Methode mit mehreren Nebenbedingungen:

Aufgabe: Maximiere/minimiere $f(x,y,z) = xyz$ unter den beiden Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = x+y-1 = 0$ (Ebene im $\mathbb{R}^3$) und $g_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ (Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 1 um $\vec{0}$).

Skizze: Es sind die Extrema von $f(x,y,z)$ zu finden auf dem Schnittkreis, der sich beim Schnitt der Ebene und der Kugel ergibt:



Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= xyz + \lambda_1(x+y-1) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1). \end{aligned}$$

$$\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} yz + \lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ xz + \lambda_1 + 2y\lambda_2 \\ xy + 2z\lambda_2 \\ x+y-1 \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Subtraktion der zweiten Koordinate von der ersten Koordinate des Gradienten ergibt:

$$-z(x-y) + 2\lambda_2(x-y) = 0 \implies \lambda_2 = \frac{z(x-y)}{2(x-y)} = \frac{z}{2} \quad \text{falls } x \neq y.$$

Aus der letzten Zeile der Gradientengleichung folgt: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$. Aus der vierten Gleichung folgt $y = 1-x$. Einsetzen in die dritte Koordinatengleichung des Gradienten ergibt:

$$0 = xy + 2z\frac{z}{2} = xy + 1 - x^2 - y^2 = x(1-x) + 1 - x^2 - (1-x)^2 = 3x(1-x).$$

Daraus folgt $x = 0$ oder $x = 1$. Falls $x = 0$, so gilt $y = 1 - x = 1$ und $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$; falls $x = 1$, so gilt $y = 1 - x = 0$ und $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$. D.h. $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ sind stationäre Punkte!

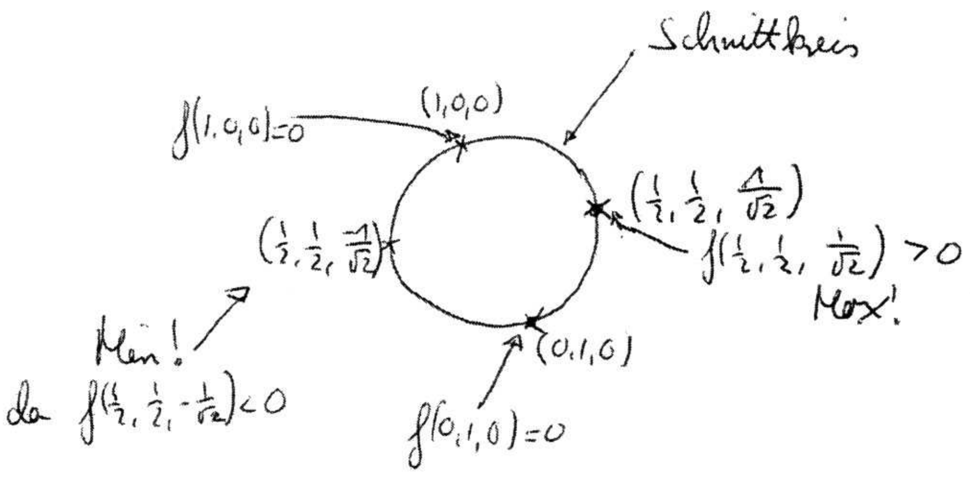
Wir betrachten nun den Fall $x = y$: Aus der vierten Gradientengleichung folgt:

$$0 = x + y - 1 = x + x - 1 \Longrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt $z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - 2x^2 = \frac{1}{2}$, d.h. $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Also sind auch $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ stationäre Punkte! Welche Typen von stationären Punkten liegen vo

Es gilt $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 0$ und $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ sowie $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$. Also muß bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Maximum vorliegen und bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein Minimum vorliegen. An den Punkten $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ können nur Sattelpunkte vorliegen, da ansonsten auf dem Schnittkreis "dazwischen" noch weitere Maxima oder Minima existieren müssten (es gibt aber keine weiteren stationären Punkte, also keine weiteren Maxima/Minima).

Skizze des Schnittkreises:



$\boxed{G9}$ VEKTORFELDER

Def: Vektorfeld: $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

★ $\vec{f}$ heißt partiell diff'bar : wenn f_i partiell diff'bar
stetig diff'bar : $\forall f_i$ stetig diff'bar ($\Leftrightarrow$ f_i part. Ableitungen existieren und stetig)

Jacobimatrix oder Funktionalmatrix

$J_{\vec{f}}(\vec{x})$: $(m \times n)$ - Matrix

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x})^t \\ \nabla f_2(\vec{x})^t \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x})^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Def: $\vec{f}$ heißt total differentierbar in $\vec{x}_0$ ($\vec{x}_0$ innerer Punkt von D) wenn es im $\vec{x}_0$ partiell diff'bar ist und

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - J \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{\| \vec{x} - \vec{x}_0 \|} = \vec{0}$$

• $J \rightarrow (m \times n)$ - Jacobi Matrix

KETTENREGEL

Satz: Ist $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to E \subseteq \mathbb{R}^m$ total differentierbar im inneren Punkt $\vec{a} \in D$ und $\vec{g}: E \to \mathbb{R}^k$ total diff'bar im inneren Punkt $\vec{f}(\vec{a}) \in E$, dann ist

$$\vec{g} \circ \vec{f}: D \to \mathbb{R}^k, \quad \vec{g} \circ \vec{f}(\vec{x}) = g(\vec{f}(\vec{x}))$$

total diff in $\vec{a}$, und es gilt

$$\boxed{J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{a}) = J_{\vec{g}}(\vec{f}(\vec{a})) \cdot J_{\vec{f}}(\vec{a})}$$

Bsp: Sei $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ x-y \end{pmatrix}$; $g(x,y) = xy$ und $\boxed{h = g \circ f}$

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad ; \quad g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

a) Jacobi-Matrizen von f und g

b) Jacobi-Matrix von h auf 2 Arten: direkt und mit der Kettenregel.

a) $J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $J_g = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$

$J_g(x,y)$

b) $h = g \circ f = g(f(x,y)) = g(e^{xy}, x-y) = (x-y)e^{xy}$

Direkt: $J_h = \begin{pmatrix} ye^{xy}(x-y) + e^{xy} & xe^{xy}(x-y) - e^{xy} \end{pmatrix}$

Kettenregel: $J_h = J_g(\vec{f}(x,y)) \cdot J_{\vec{f}}(x,y) =$

$= J_g\left(\left(e^{xy}, x-y\right)\right) \cdot J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} x-y, & e^{xy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \left[(x-y)\, y e^{xy} + e^{xy} \quad (x-y)\, x e^{xy} - e^{xy} \right]$$

GRADIENT, DIVERGENZ, ROTATION LAPLACEOPERATOR

<u>Nabla Operator</u>: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial^n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ → Differential operator

<u>Operator</u>: Abbildung die eine FKt in eine neue FKt überführt.

- Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reelwertige FKt:

$$\operatorname{grad} f := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f$$

$$\boxed{\underset{\nabla}{\operatorname{grad}} : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)}$$

- Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld $\vec{f}(x_1 \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots, x_n) \\ f_2(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots, x_n) \end{pmatrix}$

<u>Divergenz von $\vec{f}$</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{f} &:= \nabla \vec{f} = \langle \nabla, \vec{f} \rangle = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\operatorname{div} : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})}$$

Div von Vektorfeld ist ein skalarfeld (reelwertige FKt)

Divergenz eines Vektorfeldes: beschreibt die Änderung des Massenflusses im Punkt $\vec{x}$.

$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) > 0$: $\vec{x}$: Quelle

$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) < 0$ $\vec{x}$: Senke

$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = 0$ "Feld ist Quellenfrei"

LAPLACE OPERATOR

$$\Delta : (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\star \quad \boxed{\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}}$$

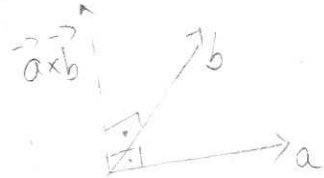
Für Vektorfelder $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Δ wird Komponentenweise definiert:

$$\Delta \vec{f} = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \vdots \\ \Delta f_m \end{pmatrix}$$

★ Laplace Operator → wichtig in vielen physikalischen Gleichungen (Wellengleichung → Kapitel 7)

ROTATION IN 3-DIM. RAUM.

ef: In R^3 gibt es noch ein Vektorprodukt $\times$ Äußere Produkt oder Kreuzprodukt von



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ = Gemeinsamer Normalvektor auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Def: Sei $\vec{f} : D \subseteq R^3 \to R^3$ ein Vektorfeld. Dann ist die Rotation von $\vec{f}$, ein neues Vektorfeld $\operatorname{rot} \vec{f} : R^3 \to R^3$, gegeben durch: $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x,y,z) = \nabla \times \vec{f}(x,y,z) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

! Beschreibt $\vec{f}$ die Geschwindigkeit einer Strömung, dann gibt $\operatorname{rot} \vec{f}$ die Wirbel dieser Strömung an.

- $\operatorname{rot} \vec{f} \equiv \vec{0} \Rightarrow$ Strömung ist wirbelfrei
- $\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$: $\vec{a}$: Zentrum des Wirbels, die Flüssigkeit rotiert um die durch $\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{a})$ gegebene Achse um den Punkt $\vec{a}$ (turbulente Strömung)

__Bsp__: $\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- in jedem Punkt $\to$ Wirbel in Richtung z – Achse

__Bsp__: Potentialfelder sind wirbelfrei

Potential $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ reelwertige Fkt

__z.B__ Potential des Gravitationsfeldes

$$U(\vec{x}) = \frac{-c}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{x}$$

__Potentialfeld__: $\vec{f}(\vec{x}) = \operatorname{grad} U(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} U_{zy} - U_{yz} \\ U_{xz} - U_{zx} \\ U_{yx} - U_{xy} \end{pmatrix} = \vec{0}$$ wegen Vertauschbarkeit der part. Ableitungen

Rechenregeln im $\mathbb{R}^3$:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Dann:

1) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) \equiv \vec{0}$ Rotationsfeld ist Quellenfrei

2) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \equiv \Delta f$ Def des Laplaceoperator.

3) $\operatorname{div}(f \cdot \vec{v}) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{v} \rangle + f \cdot \operatorname{div} \vec{v}$

4) $\operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) = \operatorname{grad} f \times \vec{v} + f \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \cdot \vec{v}$

Beweis: 1) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) \equiv \vec{0}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(\vec{x}) \\ v_2(\vec{x}) \\ v_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y}}$$

$= 0$