Formelzettel Mathematik B für Elektrotechniker

Version Sommersemester 2018

Dr. Ecaterina Sava-Huss

Kapitel F: Integration I

- Für $n \geq 3$: $\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1} \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx$
- Für $n \geq 3$: $\int \cos(x)^n \, dx = \frac{1}{n} \cos(x)^{n-1} \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos(x)^{n-2} \, dx$
- Falls $x^2 + \beta x + \gamma \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + \beta x + \gamma} = \frac{B}{2} \ln |x^2 + \beta x + \gamma| + \frac{2C - B\beta}{2\alpha} \arctan\left(\frac{x + \beta/2}{\alpha}\right) + c, \quad \alpha = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{4}}.$$

- Falls $x^2 + \beta x + \gamma \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \geq 2$:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} = -\frac{B}{2} \frac{1}{k-1} \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right) \frac{1}{\alpha^{2k-1}} \mathcal{I}_k\left(\frac{x + \beta/2}{\alpha}\right),$$

wobei

$$\mathcal{I}_k(y) = \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^k} = \frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2 + 1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \mathcal{I}_{k-1}(y), \quad \mathcal{I}_1(y) = \arctan(y) + c$$

- Zur Integration von gebrochen rationalen Funktionen in $\cos(x)$ und $\sin(x)$ eignet sich folgende Substitution:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies dx = \frac{2}{1 + u^2} du, \ \sin(x) = \frac{2u}{1 + u^2}, \ \cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Kapitel F: Integration II

- **Gausscher Satz in der Ebene:** Sei $\vec{F}$ ein differenzierbares Vektorfeld, das auf einem $B \cup C$ umfassenden Gebiet definiert ist mit $C = \partial B$. Dann gilt:

$$\int \int_B \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy = \oint_C \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, ds.$$

- **Satz von Stokes in der Ebene:**

$$\int \int_B \operatorname{rot} \vec{F} \, dx \, dy = \oint_C \vec{F} d\vec{s}$$

- **Satz: Green'sche Formeln:** Seien B und $C = \partial B$ wie oben und f, g zweimal differenzierbare Funktionen, die auf einem $B \cup C$ umfassenden Gebiet definiert sind. Dann gilt:

$$\int \int_B (f \Delta g + \langle \triangledown f, \triangledown g \rangle dx \, dy = \oint_C f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds$$
$$\int \int_B (f \Delta g - g \Delta f) dx \, dy = \oint_C \left(f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right) ds$$

Kapitel I: Differentialgleichungen

- Differentialgleichung der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$: man mache die Substitution $z = y/x$ und erhält daraus die DGL $z' = \frac{1}{x}\big(f(z) - z\big)$.

- Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) \text{ mit } \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$$

  Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, daß $\lambda(\alpha,\beta) = (a,b)$. Setze

$$g(t) = \lambda\left(1 - \frac{\gamma - \frac{c}{\lambda}}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \text{ und } F(t) = f(g(t)).$$

  Im Fall $\beta = 0$ erhält man die DGL $y' = F(\alpha x + \gamma)$. Im Fall $\beta \neq 0$ setze $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, woraus man die DGL $z' = \beta F(z) + \alpha$ erhält.

- Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) \text{ mit } \det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$$

  Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die Lösung des Gleichungssystems $ax + by = -c, \alpha x + \beta y = -\gamma$. Setze $z = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, woraus man die DGL $z' = \frac{1}{x-x_0}\left(f\left(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\right) - z\right)$ erhält.

- Bernoulli-DGL: DGL der Form $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Setze $z = y^{1-\alpha}$, woraus man die DGL $z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$ erhält.

- Ansatzmethode für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, falls Störfunktion die Form $b(x) = p(x)e^{\lambda x}$ besitzt:

$$y_{\text{sp}}(x) = x^{\mu(\lambda)} q(x) e^{\lambda x},$$

  wobei $q(x)$ ein Polynom vom gleichen Grad wie $p(x)$ ist, aber mit unbekannten Koeffizienten.

- Besitzt die Störfunktion die Form $b(x) = \big(p_1(x)\cos(\beta x) + p_2(x)\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x}$:

$$y_{\text{sp}}(x) = x^{\mu(\lambda)}\big(q_1(x)\cos(\beta x) + q_2(x)\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x},$$

  wobei $q_1(x).q_2(x)$ Polynome mit unbekannten Koeffizienten vom Grad $\max\{\deg(p_1), \deg(p_2)\}$ sind.

- Ansatzmethode für lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, falls Störfunktion die Form

$$b(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{besitzt:} \quad y_{\text{sp}}(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix},$$

  wobei $Q_1(x), \ldots, Q_n(x)$ Polynome vom Grad $\max\{\deg(p_1), \ldots, \deg(p_n)\} + \mu(\lambda)$ sind, aber mit unbekannten Koeffizienten.