F INTEGRATION – TEIL 2

INTEGRATION VON FUNKTIONEN IN MEHRERE VARIABLEN

- Integration Fkt in einer Variable - gewöhnliche (simple) Integrale
- Mehrfach Integrale → mehrere nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrale zurückzuführen

---

Def: n-dimensionales Parallelipiped ist eine Menge

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n] =$$

$$= \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i = 1 \dots n\}$$

$$\begin{cases} n=1 & : \text{Interval} \\ n=2 & : \text{Rechteck} \\ n=3 & : \text{Quader} \end{cases}$$

Def: Sei Q - Parallelipiped. Ihr Inhalt Inh(Q) ist

$$\boxed{\text{Inh}(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots (b_n - a_n)}$$

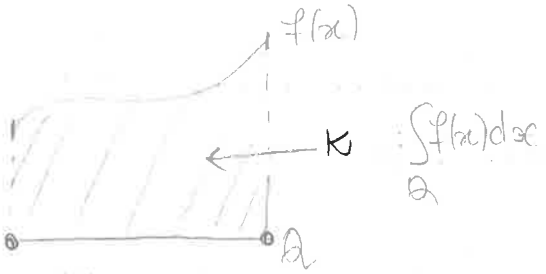
$$\begin{cases} n=1 & : \text{Länge} \\ n=2 & \text{Flächeninhalt} \\ n=3 & \text{Volumen} \end{cases}$$

Def: Sei Q - parallelipiped in $\mathbb{R}^n$ und $f: Q \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$, $\forall x \in Q$. Dann beschreibt die Menge

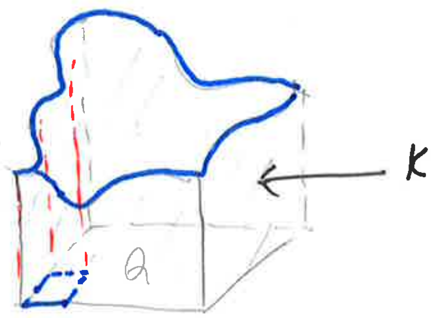
$$\boxed{K = \left\{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_n) \in Q \\ 0 \leq y \leq f(x_1, \dots, x_n) \end{array}\right\}}$$

einen Körper in $\mathbb{R}^{n+1}$.

$\boxed{n=1}$



$\boxed{n=2}$



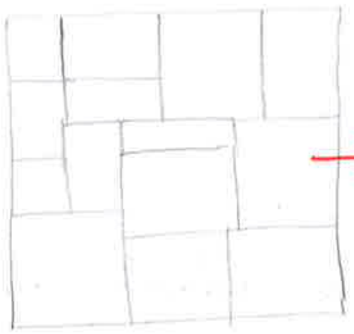
Frage: Wie berechnet man den Inhalt der Körper K?

Analog zur Integration in einer Variable betrachten wir Zerlegungen Z von Q:

$$\boxed{Q = \bigcup_{k=1}^{\ell} Q_k}$$

in Parallelipipede Q_k die nur Seitenflächen Gemeinsam haben.

$\boxed{n=2}$



$\rightarrow$ Zerlegung von Q

Wir definieren $\begin{cases} m_k = \min \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in Q_k \} \\ M_k = \max \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in Q_k \} \end{cases}$

und die Unter- und Obersummen

$$\begin{cases} U(Z,f) = \sum_{k=1}^{\ell} m_k \, \mathrm{Inh}(Q_k) & \text{: Untersumme von } f \\ O(Z,f) = \sum_{k=1}^{\ell} M_k \, \mathrm{Inh}(Q_k) & \text{Obersumme von } f \end{cases}$$

Def: Eine beschränkte Funktion $f: Q \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar auf Q, wenn

$$\boxed{\sup_Z U(Z,f) = \inf_Z O(Z,f)}$$

wobei sich Supremum und Inf über alle Zerlegungen von Q erstrecken.

- Ist f integrierbar, dann ist der gemeinsame Wert von sup und inf das Integral von f über Q

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \quad \text{oder} \quad \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n \cdots dx_1$$

Satz (Fubini): Ist f stetig auf Q, so gilt

$$\int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \underbrace{\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_n}_{f_1(x_1,\dots,x_{n-1})}\right) \cdots dx_2\right)}_{\vdots \; f_n(x_1)} dx_1$$

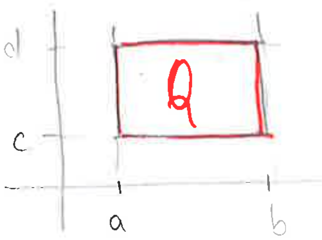
Das Integral kann durch n-sukzessive 1-dimensionale Integrationen nach dem Variablen $x_n, \dots, x_1$ berechnet werden.

Bsp: $Q = [a,b] \times [c,d]$; $f(x,y)$ stetig auf Q

$n=2$

Sei $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, für $y \in [c,d]$

$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, für $x \in [a,b]$



f stetig auf Q

$\Rightarrow \begin{cases} G(y) \text{ ist stetig auf } [c,d] \text{ und} \\ F(x) \text{ stetig auf } [a,b] \end{cases}$

und es gilt

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d G(y)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx.$$

D.h wir berechnen

$$\boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy}$$

Bsp: Sei $f: Q \to \mathbb{R}$; $Q = [0,1] \times [2,3]$

$f(x,y) = 6x^2 y$.

$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = ?$

$$* \begin{cases} F(x) = \int_2^3 6x^2 y\,dy = 6x^2 \int_2^3 y\,dy = 6x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_2^3 = 15x^2 \\ F: [0,1] \to \mathbb{R} \ ; F(x) = 15x^2 \end{cases}$$

$$* \begin{cases} G(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = 6y \int_0^1 x^2 = 6y \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 2y \\ G: [2,3] \to \mathbb{R} \ ; \ G(y) = 2y \end{cases}$$

$$\int_Q f(x,y) = \int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 15x^2\,dx = 15\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 5$$

$$= \int_2^3 G(y)\,dy = \int_2^3 2y\,dy = 2\frac{y^2}{2}\Big|_2^3 = 9-4 = 5$$

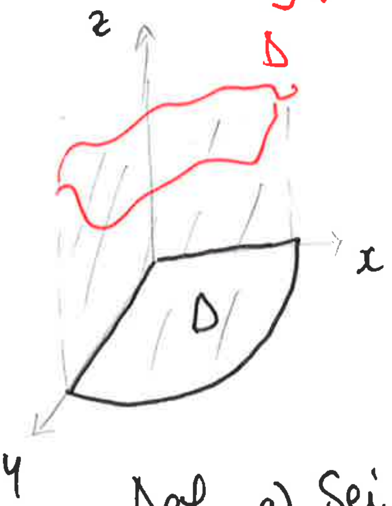
Frage: Bisher f war auf Parallelipipede Q definiert und $\int_Q f = ?$

Wie integriert man f über andere Bereiche?

Bsp.: Volumen des Körpers K über dem Viertelkreis?

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \geq 0 \, ; \, x^2+y^2 \leq 1 \, , \, 0 \leq z \leq xy\}$

$\int_D f(\vec{x})\,d\vec{x} = ?$

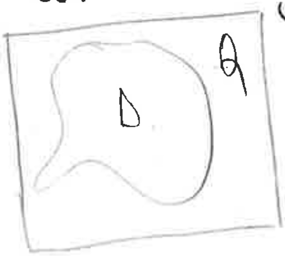


Def a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Die charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion von D ist

$\mathbb{1}_D : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$:

$$\mathbb{1}_D(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in D \\ 0, & \vec{x} \notin D \end{cases}$$

b) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und Q ein beliebiges Parallelipiped mit $D \subset Q$.



D heißt meßbar wenn die charakteristische Fkt $\mathbb{1}_D$ auf Q integrierbar ist.
Der Inhalt (Maß) von D ist dann

$$\boxed{\operatorname{Inh}(D) := \int_Q \mathbb{1}_D(\vec{x})\,d\vec{x}}$$

oder Volumen von D

(c) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und meßbar und $f: D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt f integrierbar auf D, wenn die Funktion $f \cdot 1_D$ auf Q integrierbar ist, wobei Q ein beliebiges Parallelepiped mit $D \subseteq Q$ ist.

Wir definieren

$$\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_Q f(\vec{x}) \cdot 1_D(\vec{x})\, d\vec{x}$$

Inh(D) und $\int f(\vec{x})\, d\vec{x}$ sind unabhängig von der spezifischen Wahl von $Q \supseteq D$.

Eigenschaften

- Linearität und Additivität

Wenn f, g integrierbar auf D, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_D (\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x}))\, d\vec{x} = \alpha \int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} + \beta \int_D g(\vec{x})\, d\vec{x}$$

- Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, meßbar und $D \cap E = \emptyset$:

$$\int_{D \cup E} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_E g(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

falls f integrierbar auf $D \cup E$.

- Monotonie $f(\vec{x}) \le g(\vec{x}) \quad \forall\, \vec{x} \in D \Rightarrow$
$$\int_D f(\vec{x})\,d\vec{x} \le \int_D g(\vec{x})\,dx$$

- Positivität : $f(\vec{x}) \ge 0 \quad \forall\, \vec{x} \in D \Rightarrow \int f(\vec{x})\,d\vec{x} \ge 0$

Meßbarkeit und Nullmengen

Def : Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge in $\mathbb{R}^n$
wenn $\mathrm{Inh}(A) = 0$

Bedeutung : Bsp die Fläche ist 0 im $\mathbb{R}^2$

(i) $A = [0,1]$ hat in $\mathbb{R}$ $\mathrm{Inh}(A) = 1$ = Länge

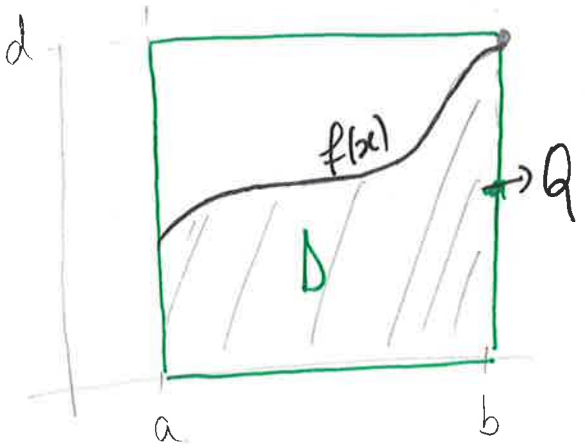
(ii) $B = \{(x,0) : x \in [0,1]\}$ ist ein Segment in $\mathbb{R}^2$
B ist Nullmenge in $\mathbb{R}^2$

(iii) in $\mathbb{R}^3$: Nullmengen haben Volumen = 0
(iv) Unstetigkeitsstellen einer Fkt. = Nullmenge.

Satz : Ist $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ein Parallelipiped und $f : P \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist der Graph von f
$$\boxed{G_f = \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, y) \;\middle|\; \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_{n-1}) \in P \\ y = f(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{array} \right\}} \subseteq \mathbb{R}^n$$
eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

- Jede endliche Menge ist eine Nullmenge.

__Bsp__: Sei $f:[a,b]\to[0,d]$ eine stetige Fkt



Sei $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{array}{l} x\in[a,b] \\ 0\le y\le f(x)\end{array}\right\}$

$Q=[a,b]\times[c,d]$

$D\subseteq Q$

$$\mathrm{Inh}(D)=\int_Q \mathbb{1}_D(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_a^b\left(\int_0^d \mathbb{1}_D(x,y)\,dy\right)dx \;\;=$$

$$\mathbb{1}_D(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le f(x)\\ 0, & f(x)<y\le d\end{cases}$$

$$\mathbb{1}_D:[0,d]\to\{0,1\}\;; \qquad x\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \int_0^d \mathbb{1}_D(x,y)\,dy = f(x)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{Inh}(D)$$

FLÄCHENINTEGRALE

$D \subseteq \mathbb{R}^2$

Frage: $\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = ?$

Für die folgenden Mengen lässt sich das Doppelintegral auf 1D - Integrale zurückführen:

De Die folg. Mengen = Normalbereiche

a) Seien $y_1(x) \le y_2(x)$ 2 stetige Fkt für $x \in [a,b]$ und

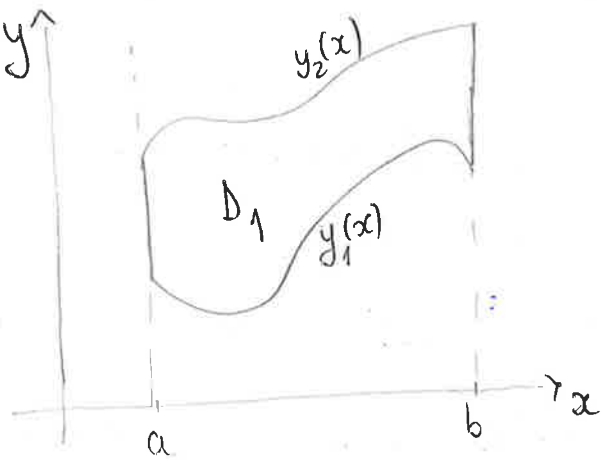
$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \; ; \; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

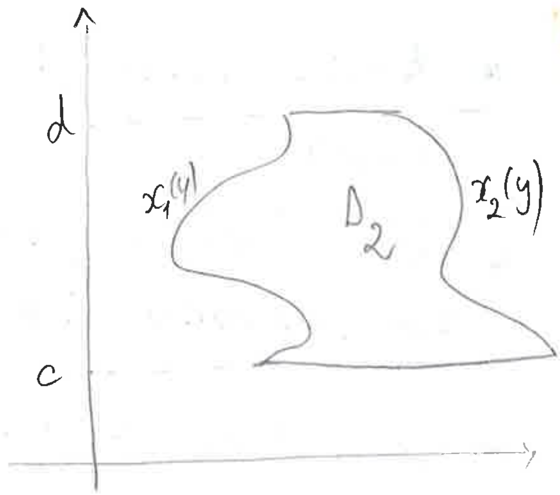
Normalbereich bezüglich y

b) Seien $x_1(y) \le x_2(y)$ 2 stetige Fkt für $y \in [c,d]$ und

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / c \le y \le d \; ; \; x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

Normalbereich bezüglich x





- Wir wollen stetige Fkt f auf D_1, D_2 integrieren. Da f stetig ist, wir können zuerst nach x und danach nach y integrieren, oder umgekehrt.

Flächenintegrale über Normalbereiche

a) Sei $f: D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig

$D_1 \to$ Normalbereich bezüglich y. Dann

$$\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

b) Sei $f: D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $D_2 \to$ Normalbereich

bezüglich x. Dann

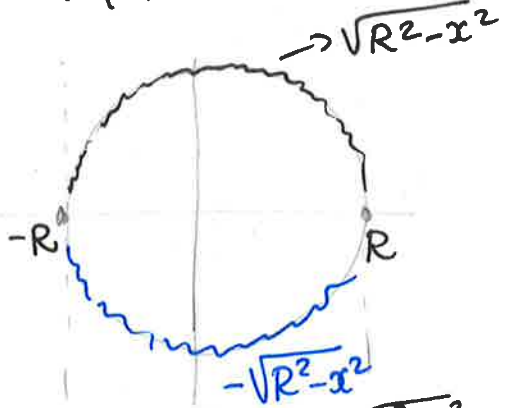
$$\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Bemerkungen:

- Zuerst innere Integration durchführen, danach äußere.
- Die Variable, über die nicht integriert wird, wird als konstanter Parameter angesehen.
- Nach dem Integrieren über eine Variable x, kommt diese Variable nicht mehr im Ergebnis vor.
- Falls D keine der Form D_1 oder D_2 besitzt, so muss man D in mehrere Teilbereiche zerlegen.
- $\boxed{\text{Für } f(x,y) = 1 : \iint_D 1\,dx\,dy = \text{Flächeninhalt von } D}$

Beispiele Flächeberechungen.

Bsp 1: Zu berechnen: Flächeninhalt eines Kreises um (0,0) mit Radius R. $= \{(x,y) \mid -R \le x \le R; -\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}\}$



D = Kreis als Normalbereich darstellen

$$\text{Inh}(D) = \int_D 1 \, dx \, dy$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y^2 = R^2 - x^2$$

$$\text{Inh}(D) = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 \, dy \right) dx = \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2-x^2} + \sqrt{R^2-x^2} \right) dx$$

$$= 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \, dx = 2R \int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \, dx \;\circleddash$$

Subst: $\frac{x}{R} = \sin t \Rightarrow x = R \sin t$

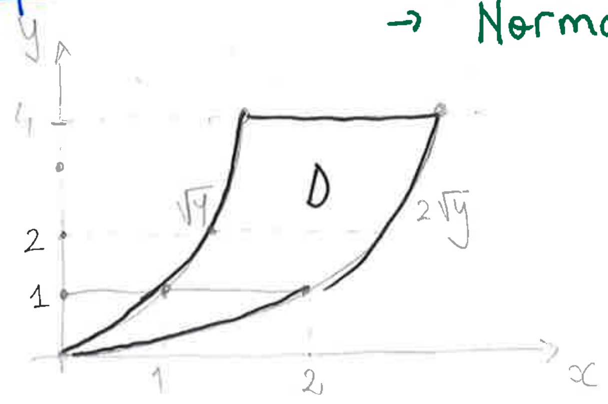
$\boxed{dx = + R \cos t \, dt}$

$x = -R \Rightarrow \sin t = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$

$$\circleddash\; 2R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 t}}_{\cos^2 t} \, R \cos t \, dt = 2R^2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt}_{\text{P.I} = \frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

Bsp 2 Sei $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 4 \;;\; \sqrt{y} \le x \le 2\sqrt{y}\}$

→ Normalbereich bezüglich x

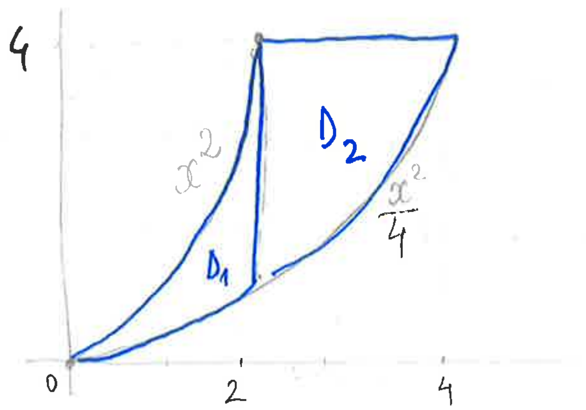


$x_1(y) = \sqrt{y} \Rightarrow x_1^2 = y$

$x_2(y) = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{x_2^2}{4} = y$

$$\text{Inh}(D) = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} 1 \, dx \, dy = \int_0^4 \sqrt{y} \, dy = y^{3/2} \cdot \frac{2}{3} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$$

Oder: Zerlege D in 2 Teilbereiche, die Normal bezüglich y sind



$$D_1 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ \frac{x^2}{4} \le y \le x^2 \end{array} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} 2 \le x \le 4 \\ \frac{x^2}{4} \le y \le 4 \end{array} \right\}$$

$$\int_D 1 \, dx\, dy = \int_0^2 \int_{\frac{x^2}{4}}^{x^2} 1 \, dy \, dx + \int_2^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{4} 1 \, dy \, dx = \frac{16}{3}$$

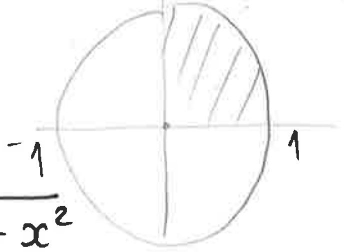
Bsp 3 Volumen des Körpers in $\mathbb{R}^3$

$$K = \left\{ (x,y,z) : \begin{array}{l} \overbrace{x,y \ge 0 \;,\; x^2 + y^2 \le 1}^{D} \\ 0 \le z \le \underbrace{xy}_{f(x,y)} \end{array} \right\}$$

$$\operatorname{Vol} K = \int_D f(x,y) \, dx\, dy$$

$$D = \{ x,y \ge 0 \; ; \; x^2 + y^2 \le 1 \}$$

$$= \{ x,y : 0 \le x \le 1 ; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \}$$

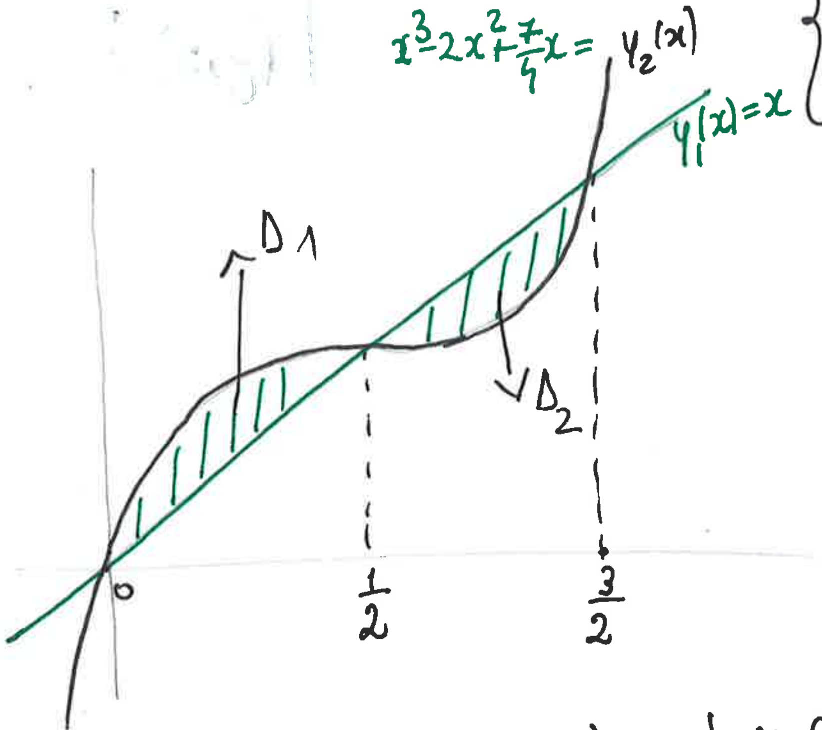


$$\operatorname{Vol}(K) = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x \, \frac{1-x^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) \, dx = \frac{1}{8}$$

Bsp 5: Fläche von D = durch dir Kurven

$$\begin{cases} y_1(x) = x \quad \text{und} \quad y_2(x) = \\ y_2(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{7}{4}x \end{cases}$$



Schnittpunkte von $y_1(x)$ und $y_2(x)$: $y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow$

$x \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

$D = D_1 \cup D_2$

$$\int_D 1\, dx\, dy = \underbrace{\int_{D_1} 1\, dx\, dy}_{F_1} + \underbrace{\int_{D_2} 1\, dx\, dy}_{F_2}$$

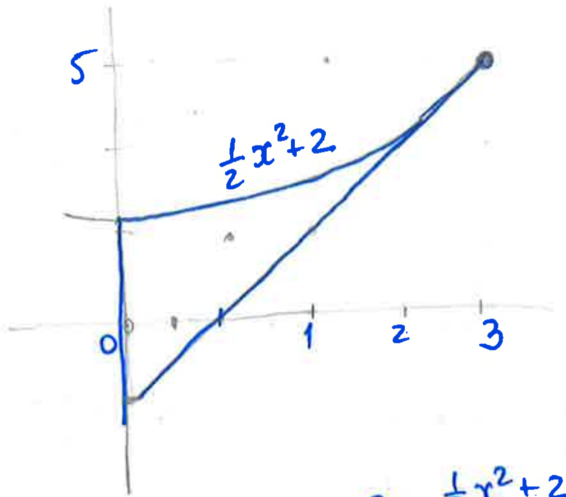
$\boxed{F_1}$: $$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} 1\, dy\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x\right) dx = \frac{5}{192}$$

$\boxed{F_2}$ $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{y_2(x)}^{y_1(x)} 1\, dy\, dx = \int_{x=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^3 + 2x^2 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{11}{96}$$

$$\Rightarrow \int_D 1\, dx\, dy = \frac{5}{192} + \frac{11}{96} = \frac{6}{94}$$

Bsp 4: Flächeninhalt: durch die Kurven $x=0$, $y=2x-1$ und $y=\frac{1}{2}x^2+2$ berandet.

$D=?$



Schnittpunkt Parabel $y=\frac{1}{2}x^2+2$ mit Geraden $y=2x-1$ ⇒

$\frac{1}{2}x^2+2=2x-1$ ⇒

$x^2-6x+9=0$ ⇒ $(x-3)^2=0$ ⇒ $\boxed{x=3}$

$D=\{(x,y): 0\le x\le 3;\ 2x-1\le y\le \frac{1}{2}x^2+2\}$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3\int_{2x-1}^{\frac{1}{2}x^2+2} 1\,dx\,dy = 3$$

$\boxed{\text{DREIFACHINTEGRALE}}$ (Volumenintegrale)

Def: Normalbereiche $M\subseteq \mathbb{R}^3$ (ähnlich wie $\mathbb{R}^2$)

Sei $f: M\to\mathbb{R}$ stetig. Für die folgenden Spezialfälle normaler (regulärer) Mengen M können die Volumenintegrale berechnet werden.

a) Gilt

$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\in D,\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$

wobei $\begin{cases} D = \text{Normalbereich in } \mathbb{R}^2 \\ z_1\le z_2 \text{ stetige Fkt auf } D\end{cases}$ dann

$$\iiint_M f\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

- Analoge Aussagen gelten für $y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z)$ bzw für $x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z)$

b) Gilt

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \;, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\}$$

wobei $y_1(x) \leq y_2(x)$ stetig auf $[a,b]$

$z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$ stetige Fkt von

$(x,y) \in D = \{a \leq x \leq b \;, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$

dann

$$\iiint_M f \, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

- Auch hier gelten die Aussagen mit vertauschten Variablen.

! Falls $f \equiv 1$ erhalten wir $\mathrm{Vol}(M)$

Bsp

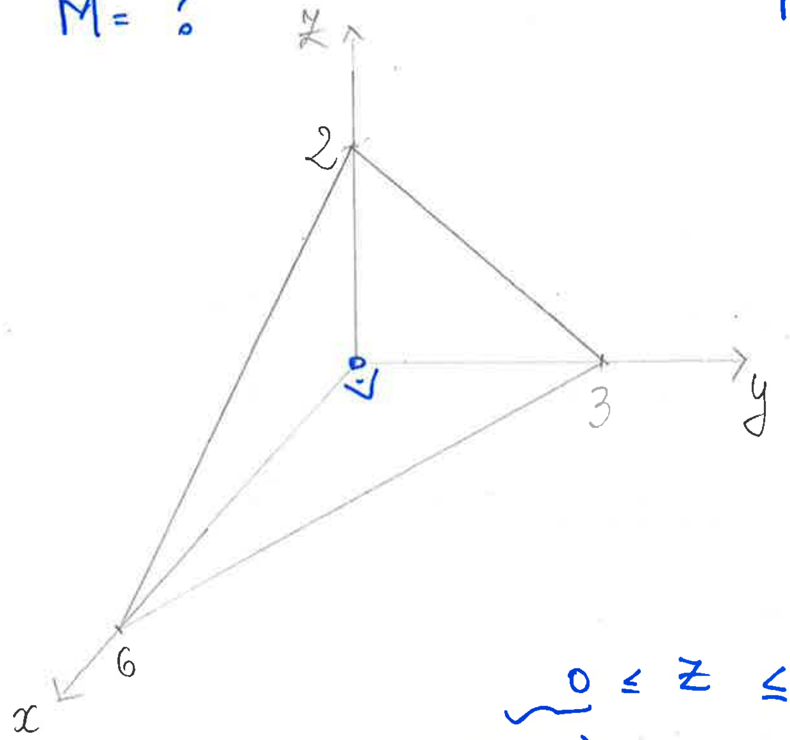
Schwerpunkt (x_s, y_s, z_s) eines Körpers K mit Massenverteilung $\rho(x,y,z)$:

$$\begin{cases} x_s = \dfrac{1}{V} \iiint_K x\,\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ y_s = \dfrac{1}{V} \iiint_K y\,\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ z_s = \dfrac{1}{V} \iiint_K z\,\rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ V = \iiint_K \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \end{cases}$$

Beispiel: Pyramide begrenzt durch die Koordinatenebenen und die Ebene $\boxed{x+2y+3z=6}$

Massenverteilung $\rho \equiv 1 \Rightarrow V = Vol(M)$

M = ?



M = als Normalbereich darstellen

$x, y, z \geq 0$

$\boxed{y \in [0,3]}$

$x_1(y) = 0 \leq x \leq 6 - 2y - 3z \leq 6 - 2y = x_2(y)$

$\Rightarrow \boxed{0 \leq x \leq 6-2y}$

$\underbrace{0}_{z_1(x,y)} \leq z \leq \underbrace{\tfrac{1}{3}(6-x-2y)}_{z_2(x,y)}$

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 3, \ 0 \leq x \leq 6-2y, \ 0 \leq z \leq \tfrac{1}{3}(6-x-2y) \right\}$$

$Vol(M) = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot 2 =$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 2 \cdot \cancel{9}3 = 6$

Schwerpunkt:

$$x_S = \frac{1}{6} \int_0^3 \int_0^{6-2y} \left(\int_0^{\frac{1}{3}(6-x-2y)} x \cdot dz \right) dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^3 \int_0^{6-2y} x \ \tfrac{1}{3}(6-x-2y)\, dx\, dy = \frac{1}{18} \int_0^3 \left(6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2y\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{6-2y} dy$$

$= \frac{3}{2}$; $y_S = \frac{3}{4}$; $z_S = \frac{1}{2}$

SUBSTITUTION FÜR MEHRFACHINTEGRALE

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, beschränk und $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte (meßbare) Menge.

<u>Frage</u>: $\int_D f(\vec{x})\, d\vec{x} = ?$

- <u>Substitution</u>: $\vec{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n) \longrightarrow \vec{u} = (u_1, \dots u_n)$
  Ursprungliche Var — neue Var.
- Stellen $\vec{x}$ als Funktion von $\vec{u}$ dar.

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1 \dots, u_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(u_1 \dots, u_n) \end{cases}$$

$\vec{x}(\vec{u}): \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Vektorfeld)

- Die Zuordnung muss <u>bijektiv</u> sein.

- Gebiet D in $(x_1, \dots, x_n)$ Koordinatensystem wird zu einem Gebiet E in $(u_1, \dots u_n)$ Koordinatensystem transformiert.

- Transformation des Inhaltselements. $(dx = \, ? \, du \, ?)$

$$\underbrace{d\vec{x}}_{\text{Flächenelement}} = dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n \longrightarrow \underbrace{\left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(v_1 \ldots v_n)} \right|}_{\text{Jacobi-determinante}} \partial v_1 \ldots \partial v_n$$

$\vec{x} : R^n \to R^n$

$$\underbrace{J_{\vec{x}}(v_1 \ldots, v_n)}_{\text{Jacobi-Matrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial v_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial v_n} \end{pmatrix}$$

$$|J_{\vec{x}}(\vec{u})| = \det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}} \right)$$

- Es gilt dann

$$\int_D f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_E f(\vec{x}(\vec{u})) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{u}} \right| d\vec{u}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\int_D f(x_1 \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n = \int_E f(x_1(u_1 \ldots u_n), \ldots x_n(v_1 \ldots, v_n)) \cdot |\det J| \cdot du_1 du_2 \ldots du_n}$$

<u>Beachte</u>: das äußere Integral immer feste Grenzen hat.