$\boxed{15}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy + y^2}{|x| + |y|}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig, da Quotient stetigen Fkt.
- In $(0,0) = ?$

$f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - f(0,0)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy + y^2|}{|x| + |y|} \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y| \cdot \cancel{(|x| + |y|)}}{\cancel{|x| + |y|}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0 \Rightarrow f \text{ stetig auch in } (0,0)$$

- Parziellen Ableitungen in $(0,0) = ?$

Laut Def der parz. Ableitungen

$f(t,0) = \dfrac{t \cdot 0 + 0^2}{|t| + 0} =$

- $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t \cdot 0 + 0^2}{|t| + 0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ Existiert und ist $= 0$.

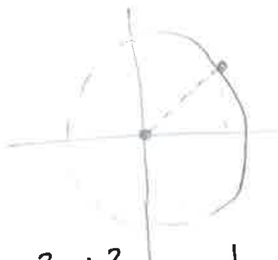
- $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^{\cancel{2}}}{|t|}}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 0_-} \dfrac{t}{|t|} = \lim\limits_{t\to 0_-} \dfrac{\cancel{t}}{-\cancel{t}} = -1 \\ \lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{t}{|t|} = \lim\limits_{t\to 0_+} \dfrac{t}{t} = 1 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow \lim \text{ existiert nicht} \Rightarrow$$

f ist nach y in $(0,0)$ nicht partiell diff'bar.

$\boxed{16}$ $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$; $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{t\to 0} f(t\cdot\vec{v}) = ?$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$



$\vec{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$; $b \in [-1,1]$

Richtungsableitungen $\|\vec{v}\| = 1$ $\Rightarrow a = \pm\sqrt{1-b^2}$

$$\lim_{t\to 0} f(t\cdot\vec{v}) = \lim_{t\to 0} f(ta, tb) = \lim_{t\to 0} \frac{2ta\,tb}{(ta)^2+(tb)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2ab}{\underbrace{a^2+b^2}_{1}} = \lim_{t\to 0} 2ab = \underline{\underline{2ab}} = \underbrace{\pm 2b\sqrt{1-b^2}}_{g(b)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} f(t\vec{v}) = g(b) := \pm 2b\sqrt{1-b^2}$$

$b = \pm 1 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow g(b) = 0$

$\underline{\underline{\text{Sei}}}$ $g_1 : [-1,1]$; $g_1(b) = 2b\sqrt{1-b^2}$

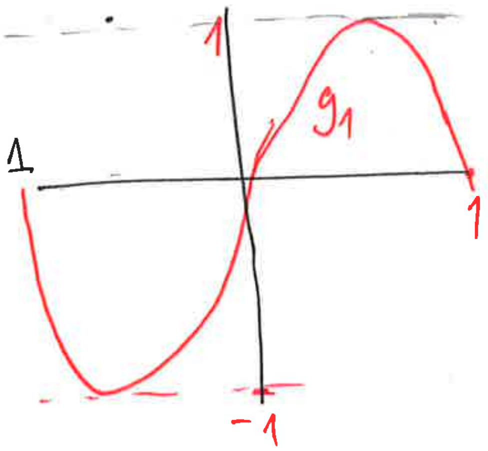
$$g_1'(b) = \left(2\sqrt{1-b^2} + \frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}\sqrt{1-b^2}}(-2b)\right) =$$

$$= \left(\frac{2(1-b^2) - 2b^2}{\sqrt{1-b^2}}\right) = 2\,\frac{1-2b^2}{\sqrt{1-b^2}}$$

$g_1'(b) = 0 \Rightarrow (1-2b^2) = 0 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 2\,\frac{1}{2} = 1$

$g_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$



Ähnlich für $g_2(b) = -2b\sqrt{1-b^2}$

$g_1(b)$ und $g_2(b)$ können alle Werte in $[-1,1]$ annehmen.

17 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Stetigkeit: f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig (Quotient stetiger Funktionen)

in $(x,y) = (0,0)$

- Sei $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 0}{\frac{1}{n^2} + 0} = 1$

Sei $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -1$

$\neq$ $\Rightarrow$ f nicht stetig in $(0,0)$

b) $\vec{v} = (a,b) = ?$ sodaß $\exists\, \partial_{\vec{v}} f(0,0)$

$\|\vec{v}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$\partial_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f[(0,0)+t(a,b)] - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}(a^2-b^2)}{\cancel{t^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(a^2-b^2)}{t} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a^2-b^2=0 \\ +\infty, & a^2-b^2 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ✱ Für $a^2-b^2 \neq 0$, $\partial_{\vec{v}} f(0,0)$ existiert nicht

✱ Für $a^2-b^2=0$: $\partial_{\vec{v}} f(0,0) = 0$

$\Updownarrow$

$a = \pm b$ $\Rightarrow$ Aber $a^2+b^2=1 \Rightarrow 2b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Für $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ existiert $\partial_{\vec{v}} f(0,0)$

c) Totale Differentierbarkeit

Def: $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$ innerer Punkt; f heißt total diff'bar wenn $\exists\, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$: $\boxed{\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \dfrac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \langle \vec{k}, \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0}$

Satz

(1) • Ist f total diff'bar in $\vec{x}_0$, dann gilt $k = \nabla f(\vec{x}_0)$

(2) • Ist f total diff'bar in $\vec{x}_0$, $\Rightarrow f$ stetig in $\vec{x}_0$

• f ist total diff'bar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
In $(x,y) = (0,0)$ f nicht stetig $\Rightarrow$ nicht total diff'bar.

$\boxed{18}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(y) + y^2 \sin(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

• f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ total diff'bar.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Partielle Ableitungen existieren in } (0,0)$$

• f ist total diff'bar in $(0,0)$ wenn

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \nabla f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\dfrac{x^2 \sin y + y^2 \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 \sin y + y^2 \sin x}{x^2+y^2} \overset{?}{=} 0$$

$$\left| \frac{x^2 \sin y + y^2 \sin x}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^2| \, |\sin y| + |y^2| \, |\sin x|}{|x^2 + y^2|} \leq$$

$$|\sin x| \leq |x|$$

$$\leq \frac{|x^2| |y| + |y^2| \cdot |x|}{|x^2 + y^2|} = |y| \cdot \underbrace{\frac{|x^2|}{|x^2+y^2|}}_{\leq 1} + |x| \cdot \underbrace{\frac{|y^2|}{|x^2+y^2|}}_{\leq 1}$$

$$\leq |x| + |y| \xrightarrow[(x,y) \to (0,0)]{} 0 \Rightarrow$$

f ist in $(0,0)$ total diff'bar.