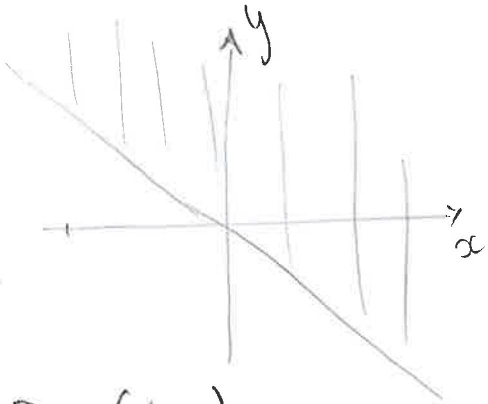
(21) $f(x,y) = \ln(x+y) - \dfrac{x^3}{3} - y$; Def. Bereich $D = \{x+y>0\}$



Stationäre Punkte: $\nabla f(x,y) = \vec{0} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y} - x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+y} = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{y-1} = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,2)$ $\in D$. stationäre Punkte

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- $f_{xx} = \dfrac{-1}{(x+y)^2} - 2x$
- $f_{xy} = \dfrac{-1}{(x+y)^2}$
- $f_{yy} = \dfrac{-1}{(x+y)^2}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a > 0$, $\det A > 0 \Rightarrow$ pos def

$a < 0$, $\det A > 0 \Rightarrow$ neg def

$\det A < 0 \Rightarrow$ indefinit

$\underline{P_1}$: $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
$(1,0)$

$\det H_f(1,0) = (-3)(-1) - 1 > 0 \Rightarrow$ neg def $\Rightarrow P_1 = (1,0)$ max

$\underline{P_2} = (-1,2)$ $H_f(-1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det H_f(-1,2) = -2 < 0 \Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow P_2$ Sattelpunkt

$\boxed{23}$ $f(x,y,z)=\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}$

$g(x,y,z)=x+y+z-11=0$

$\min f(x,y,z)=?$

Lagrange: $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$

$$L(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}+\lambda(x+y+z-11)$$

$$\begin{cases} L_x=\frac{2x}{6}+\lambda \overset{!}{=}0 \\ L_y=\frac{2y}{3}+\lambda \overset{!}{=}0 \\ L_z=\frac{2z}{2}+\lambda \overset{!}{=}0 \\ L_\lambda=x+y+z-11\overset{!}{=}0 \end{cases}$$

$L_x, L_y \Rightarrow x=2y$

$L_y, L_z \Rightarrow 2y=3z$

$\Rightarrow x=3z$

$L_\lambda \Rightarrow$

$\Downarrow\ 2y+y+\frac{2}{3}y=0 \Rightarrow 11y=33 \Rightarrow y=3$

$x=6$

$z=2$

$\Rightarrow \underbrace{P=(6,3,2)}_{\min}$ da nach oben $f(x,y,z)$ unbeschränkt ist.

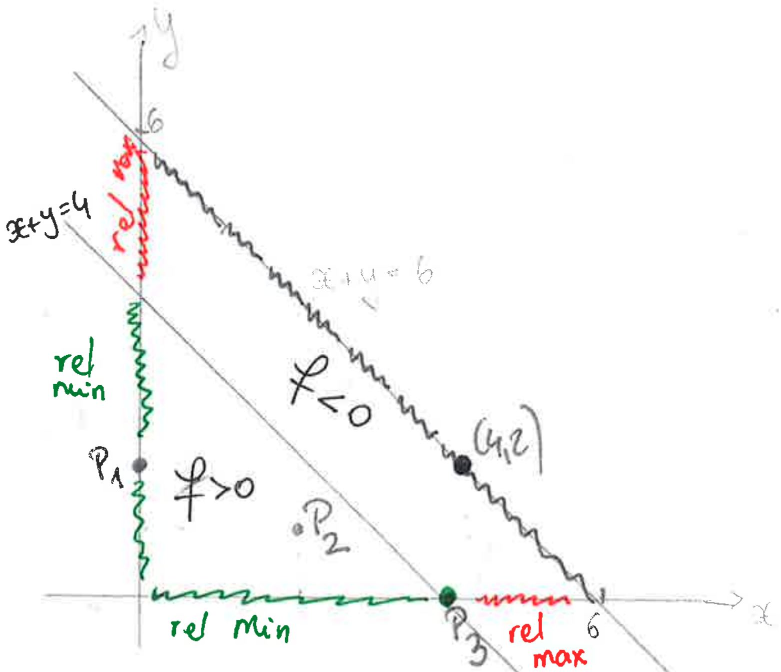
$f(4,3,4)>11$

$\boxed{f(6,3,2)=11}$

15/05/2018

(2) **Bsp**: Bestimmen Sie die Extrema (rel und Absolute) für $f(x,y)$ gegeben durch: $f(x,y) = yx^2(4-x-y)$

im Dreieck, begrenzt durch die Geraden. $x=0$, $y=0$, $x+y=6$



Praktisches Vorgehen

$\boxed{A}$ Stationäre Punkte

$\nabla f(x,y) = 0$

$$\begin{cases} f(x,y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2 \\ f_x(x,y) = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 \\ f_y(x,y) = 4x^2 - x^3 - 2x^2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(8-3x-2y) = 0 \Rightarrow (4-2y)\,y\,(8-3(4-2y)-2y) = 0 \; (*) \\ x^2(4-x-2y) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ oder } 4-x-2y=0 \end{cases}$$

$x=0 \to$ Nur Randpunkte

$4-x-2y=0 \Rightarrow x = 4-2y$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} 4-2y=0 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 8-12+6y-2y=0 \Rightarrow 4y=4 \Rightarrow \boxed{y=1} \to \boxed{x=2} \\ y=0 \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Punkte:

- $(0,2) = P_1$ — rel Min.
- $(2,1) = P_2$ — rel Max
- $(4,0) = P_3$ — Kein Extrema
- $(0,y) \to P_4$ — rel Max oder Min.

Nur $P_2 \to$ innerer Punkt von D

die anderer Punkte müssen anders untersucht werden.

<u>P2</u> : Hesse Matrix im $(2,1)$

$f_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2$

$f_{yy} = -2x^2$

$f_{yx} = 8x - 3x^2 - 4xy = f_{xy}$ da f 2-mal stetig diff-bar

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(2,1) & f_{xy}(2,1) \\ f_{yx}(2,1) & f_{yy}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-12-2 & 2\cdot 8-12-8 \\ -4 & -2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & - \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det H_f(2,1) = 6\cdot 8 - 16 = 32 > 0$, $f_{xx}(2,1) = -6 < 0$ $\Rightarrow H_f \to$ neg. def und.

$\boxed{(2,1) \text{ rel. Maximum}}$

$\boxed{B}$ Randpunkte von f

$(4,0) \to$ Zeichnen die Höhenlinien

$$f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y = 4 \end{cases}$$

$\underline{x=0}$: $f(0,y) = 0 \Rightarrow$ $(0,y)$ rel. min $0 \le y < 4$; $(0,y)$ rel Max $4 < y \le 6$.

P1 und P4

$y=4$: $(0,4)$ kein Extremwert, wei jede Umgebung von $(0,4)$: $f<0$ und $f>0$

$\boxed{y=0}$: $f(x,0) = 0 \Rightarrow$ $(x,0)$ rel Min für $0 \le x < 4$; $(x,0)$ rel Max für $4 < x \le 6$

$(4,0) \to$ Kein Extrema.

Was ist am Rand $\boxed{x+y=6}$ ~~$x = 6-y$~~ $y = 6-x$

$f(x,y) = -2x^2(6-x) = -12x^2 + 2x^3$

$(0,6)$

$f'(x) = 6x^2 - 24x = 0 \Rightarrow$ $x = 0$; $x = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (4,2)$

$(0,6) \to$ rel Max

Was ist $(4,2) = ?$

$f(4,2) = -64$

Alle anderen rel Min. ist $f = 0 \Rightarrow (4,2)$ ist absolutes Min

Rel max : $f(2,1) = 4$

$$\left.\begin{array}{ll} f(0,y) = 0 & , 4 < y \leq 6 \\ f(x,0) = 0 & 4 < x \leq 6 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,1) \text{ Absolutes Max}$$

Zusammenfassung :

rel Max : $\begin{cases} (0,y) & 4 < y \leq 6 \quad ; f(0,y) = 0 \\ (x,0) & 4 < x \leq 6 \quad f(x,0) = 0 \end{cases}$

abs Max : $(2,1)$ $f(2,1) = 4$

rel Min : $(0,y)$: $0 \leq y < 4$; $f(0,y) = 0$

$(x,0)$: $0 \leq x < 4$ $f(x,0) = 0$

abs Min : $(4,2)$ $f(4,2) = -64$.

Wie untersucht man die Randpunkte ?

- Zeichnung der Höhenlinien $f(x,y) = f(x_0,y_0)$
- Anwendung Satz von Weierstraß (Kompakte Menge)
- Direkte Berechnung von $f(x,y) - f(x_0,y_0)$
- Schnitt mit bestimmten Flächen.