

# Mathematik B für Elektrotechnik

Ecaterina Sava-Huss

Sommersemester 2018

① Funktionen in mehrere Variablen

② Systeme von DGL

# Beispiele: Höhengschichtlinien oder Niveaulinien

## Beispiel

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

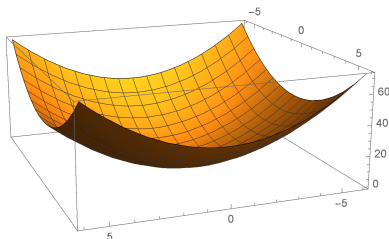


Abbildung: Graph von  $f$

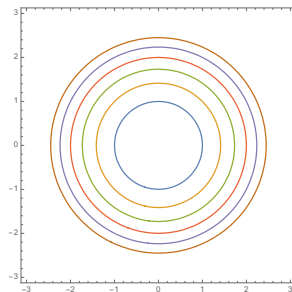


Abbildung: Höhenglinien von  $f$

# Beispiele: Höhengschichtlinien oder Niveaulinien

## Beispiel

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch:

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

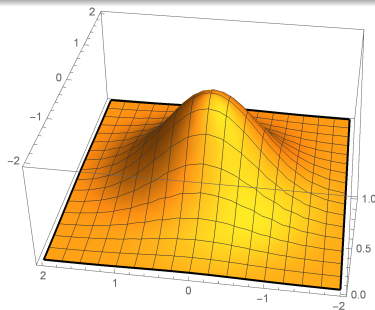


Abbildung: Graph von  $f$

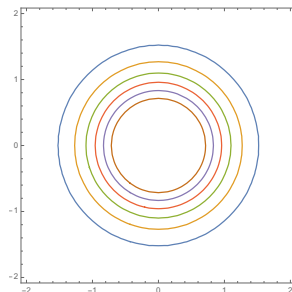


Abbildung: Höhenlinien von  $f$

# Beispiele: Höhengschichtlinien oder Niveaulinien

## Beispiel

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch:

$$f(x, y) = x^3 - y^2$$

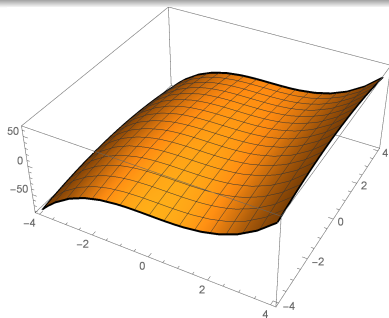


Abbildung: Graph von  $f$

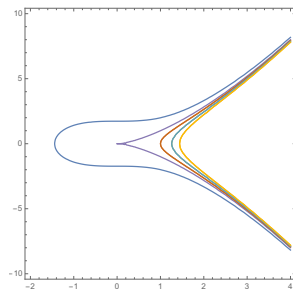


Abbildung: Höhenlinien von  $f$

# Stetigkeit

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

f stetig in (0, 0)

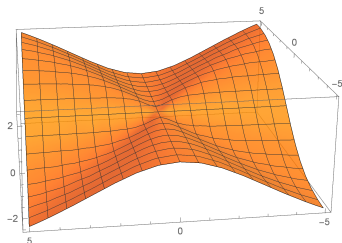


Abbildung: Graph von f

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

f nicht stetig in (0, 0)

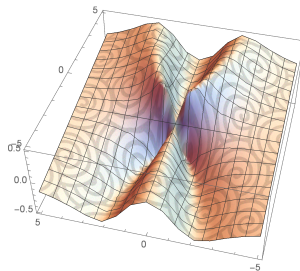
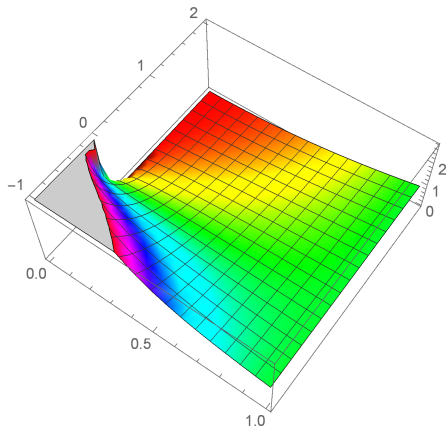


Abbildung: Graph von f

# Partielle Ableitungen

## Beispiel

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch:  $f(x, y) = x^y$

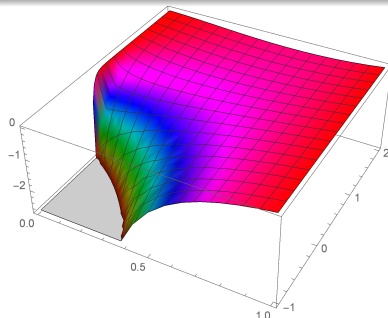
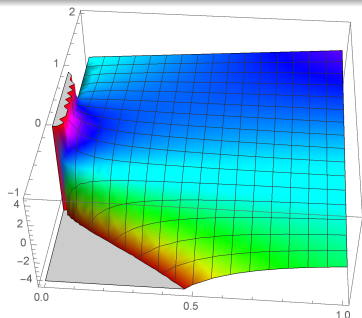


# Partielle Ableitungen

## Beispiel

*Gradient von  $f$  ist gegeben durch:*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ x^y \ln(x) \end{pmatrix}$$





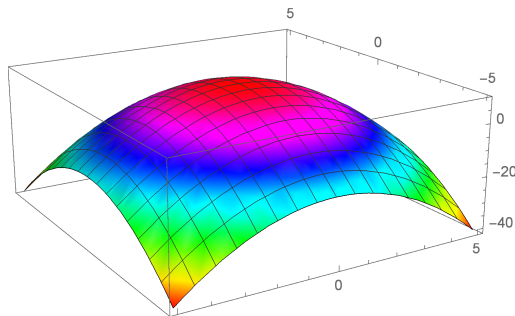
# Partielle Ableitungen

## Beispiel

Sei  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ .  $f_x(1, 2) = ?$  und  $f_y(1, 2) = ?$

$f_x(x, y) = -2x$  und  $f_x(1, 2) = -2$

$f_y(x, y) = -2y$  und  $f_y(1, 2) = -4$ .



# Systeme von DGL

Explizites System von n DGL 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Gesucht: ein Vektor von Lösungen  $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$ .  
Theorie = wie im Fall von DGL 1. Ordnung.

## Theorem

*Existenz und Eindeutigkeitssatz: Siehe Skriptum I-40.*

# Lineare Systeme 1. Ordnung

Lineares System 1. Ordnung hat die Form:

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei  $a_{ij}(x)$  und  $b_j(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  sind stetige Funktionen von  $x$ .

## Definition

System heißt homogen wenn  $\vec{b}(x) \equiv 0$ , ansonsten inhomogen.

$A$  heißt die Koeffizientenmatrix und  $\vec{b}(x)$  ist der Störvektor.

# Lineare Systeme 1. Ordnung

**Fundamentalsystem** = n linear unabhängigen Lösungen  $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$ .

**Lösung des homogenen Systems:**

$$\vec{y}_{hom}(x) = C_1 \vec{y}^{[1]}(x) + \dots + C_n \vec{y}^{[n]}(x),$$

wobei jedes  $\vec{y}^{[1]}(x)$  ist ein Vektor in  $\mathbb{R}^n$ .

**Fundamentalmatrix = Wronski-Determinante  $W(x)$**  von  $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$ :

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{[1]}(x) & y_1^{[2]}(x) & \dots & y_1^{[n]}(x) \\ y_2^{[1]}(x) & y_2^{[2]}(x) & \dots & y_2^{[n]}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{[1]}(x) & y_n^{[2]}(x) & \dots & y_n^{[n]}(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad W(x) = |Y(x)|.$$

## Definition

Die Lösungen  $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$  sind genau dann ein Fundamentalsystem wenn  $W(x) \neq 0$  für alle  $x$ .

# Lineare Systeme mit Konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$$

A Matrix mit konstanten Koeffizienten. Lösung  $\vec{y}(x) = \vec{y}_{hom}(x) + \vec{y}_{sp}(x)$ .

## I. Lösung $\vec{y}_{hom}(x)$ der homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$

Rate eine Lösung:  $\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{v}$ . Dann folgt  $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ ,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  ist **Eigenvektor** von  $A$  zum **Eigenwert**  $\lambda$ .

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ : das **charakteristische Polynom** von  $A$  hat  $n$  Nullstellen.

- **algebraische Vielfachheit**  $\mu(\lambda)$ : Vielfachheit von  $\lambda$  als Nullstelle von  $P(\lambda)$ .
- **Geometrische Vielfachheit**  $\nu(\lambda)$  = Dimension des zugehörigen Eigenraumes, Anzahl lin. unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$ . Es gilt immer  $\mu(\lambda) \geq \nu(\lambda) \geq 1$ .

# I. Lösung der homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$

Zu jeder Nullstelle  $\lambda$ :  $\mu = \mu(\lambda)$  linear unabhängigen zugehörige Lösungen.

## Fall 1: $\mu(\lambda) = \nu(\lambda)$

Der zu  $\lambda$  gehörige Eigenraum ist  $\mu$ -dimensional mit linear unabhängige Eigenvektoren  $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(\mu)}$ . Zugehörige Lösungen sind

$$e^{\lambda x} \vec{v}^{(1)}, \dots, e^{\lambda x} \vec{v}^{(\mu)}$$

## Fall 2: $\mu(\lambda) > \nu(\lambda)$

Der zu  $\lambda$  gehörige Eigenraum ist nur  $\nu$ -dimensional mit linear unabhängige Eigenvektoren  $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(\nu)}$ , und Lösungen  $e^{\lambda x} \vec{v}^{(1)}, \dots, e^{\lambda x} \vec{v}^{(\nu)}$ . Die fehlenden  $\mu - \nu$  Lösungen erhält man durch den Ansatz

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{wobei } p_i(x) \text{ sind Polynome vom Grad } \mu - \nu.$$

# I. Lösung der homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$

- **Fall 2a: falls  $\mu = 2$  und  $\nu = 1$** , erste Lösung ist  $\vec{y}^{[1]} = e^{\lambda x} \vec{v}^{(1)}$  und der Ansatz für die zweite Lösung:

$$\vec{y}^{[2]} = x e^{\lambda x} \vec{v}^{(1)} + e^{\lambda x} \vec{v}^{(2)}, \quad \text{mit} \quad (A - \lambda I) \vec{v}^{(2)} = \vec{v}^{(1)}.$$

- **Fall 2b: falls  $\mu = 3$  und  $\nu = 1$** : erste und zweite Lösung wie oben, Ansatz für die dritte Lösung:

$$\vec{y}^{[3]} = \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} \vec{v}^{(1)} + x e^{\lambda x} \vec{v}^{(2)} + e^{\lambda x} \vec{v}^{(3)}, \quad \text{mit} \quad (A - \lambda I) \vec{v}^{(3)} = \vec{v}^{(2)}.$$

- Bei komplexem Eigenwert  $\lambda = \alpha + i\beta$ , rechnet man komplex. Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung führen dann zu 2 reelle Lösungen.
- Lösung  $\vec{y}_{hom}(x)$ : lineare kombination von  $\vec{y}^{[1]}(x), \dots, \vec{y}^{[n]}(x)$ :

$$\vec{y}_{hom}(x) = C_1 \vec{y}^{[1]}(x) + \dots + C_n \vec{y}^{[n]}(x)$$

## II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

**Ansatzmethode**: Sei

$$\vec{b}(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  Polynome mit max. Grad  $m \geq 0$ . Sei  $\mu = \mu(\lambda)$  wieder die Vielfachheit (algebraisch) von  $\lambda$  als Nullstelle des char. Polynoms  $P(\lambda)$ . **Ansatz für die spezielle Lösung:**

$$\vec{y}_{sp}(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix}$$

wobei  $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$  Polynome mit Grad  $m + \mu$  und unbekannten Koeffizienten sind. Durch Einsetzen in das inhomogene DGLS und Koeff.vergleich, erhält man lineare Gleichungen, die zu lösen sind.



## II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

- Wenn

$$\vec{b}[x] = \vec{b}^{[1]}(x) + \dots + \vec{b}^{[r]}(x),$$

wobei jedes  $\vec{b}^{[k]}$  von der obigen Form ist, und jedes  $\vec{b}^{[k]}$  hat ein  $\lambda_k$  zugeordnet, dann hat man  $r$  spezielle Lösungen.

- Wenn

$$\vec{b}(x) = e^{\alpha x} \left[ \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \cos(\beta x) + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \sin(\beta x) \right]$$

- Da  $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$ , können wir  $\cos(\beta x)$  und  $\sin(\beta x)$  wir folgt umschreiben:

$$\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}), \quad \sin(\beta x) = -\frac{i}{2}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}).$$

## II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Wir setzen nun diese Ausdrücke in  $\vec{b}(x)$  ein:

$$\begin{aligned}\vec{b}(x) = & \underbrace{e^{(\alpha+i\beta)x} \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \right]}_{=:\vec{b}_1(x)} + \\ & + \underbrace{e^{(\alpha-i\beta)x} \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \right]}_{=:\vec{b}_2(x)}\end{aligned}$$

Das heißt, wir können den Störvektor zerlegen in  $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$ .

Man beachte, dass  $\vec{b}_2(x) = \overline{\vec{b}_1(x)}$ .

## II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Wir berechnen nun zum System  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$  eine spezielle (komplexwertige) Lösung  $\vec{y}_{1,sp}(x)$  mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix},$$

wobei  $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$  Polynome mit unbekannten Koeffizienten sind vom Grad  $\mu(\alpha + i\beta) + m$ , wobei  $m$  der maximal auftretende Grad der Polynome  $p_1(x), \dots, p_n(x)$ ,  $q_1(x), \dots, q_n(x)$  ist und  $\mu(\alpha + i\beta)$  die Vielfachheit von  $\alpha + i\beta$  als Nullstelle im charakteristischen Polynom  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  ist. Man leitet dann  $\vec{y}_{1,sp}(x)$  komponentenweise nach  $x$  ab, setzt in das inhomogene DGL-System  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$  ein und mittels Koeffizientenvergleich werden die (eventuell komplexwertigen) Koeffizienten von  $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$  bestimmt.

## II. Spezielle Lösung der inhom. Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$

Beobachtung:  $\vec{y}_{2,sp}(x) := \overline{\vec{y}_{1,sp}(x)}$  ist dann eine spezielle Lösung des Systems  $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_2(x)$ , denn:

$$\begin{aligned}\vec{y}'_{2,sp}(x) &= \overline{\vec{y}'_{1,sp}(x)} = \overline{A\vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{b}_1(x)} = \overline{A\vec{y}_{1,sp}(x)} + \overline{\vec{b}_1(x)} \\ &= A\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \vec{b}_2(x) = A\vec{y}_{2,sp}(x) + \vec{b}_2(x).\end{aligned}$$

Somit ist eine spezielle (reellwertige) Lösung zum Störvektor  $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$  gegeben durch

$$\vec{y}_{sp}(x) = \vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{y}_{2,sp}(x) = 2\operatorname{Re}(\vec{y}_{1,sp}(x)).$$