Übungen "Mathematik B für Elektrotechniker"

SS 2011

TUG **Institut für mathematische Strukturtheorie (Math. C)**

07. April 2011

Hinweis: Falls am Ende dieser Übungsstunde noch genug Zeit ist, so werden die Aufgaben 16 und 17 in denjenigen Übungsgruppen noch nachgeholt, in welchen sich die Besprechung in der letzten Übungsstunde zeitlich nicht mehr ausging. Diese beiden Aufgaben sind nicht ankreuzbar, jedoch ist ein Vorrechnen mit Punktesammeln auf freiwilliger Basis möglich.

16. Man betrachte den Funktionsgraphen von $f(t) = t^2 + 2t - 1$ im Intervall $[0, 1]$. Berechnen Sie die Bogenlänge des Funktionsgraphen von $f(t)$ im Intervall $[0, 1]$. (3 Pkt.)

17. Man betrachte die folgende Feder-Kurve: (3 Pkt.)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi].$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.

18. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$ und sei $m = \frac{a+b}{2}$. Zeigen Sie: (je 2 Pkt.)

$$(a) \quad \int_a^b \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} dx = \frac{b-a}{6} \quad \text{und} \quad (b) \quad \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{b-a}{2}.$$

19. Es ist das Integral $\int_0^2 x \cdot e^{-x^3}\, dx$ numerisch zu berechnen. (je 2 Pkt.)

    (a) Berechnen Sie approximativ den Wert des Integrals mit Hilfe der Trapezformel, und schätzen Sie den Fehler ab.

    (b) Berechnen Sie approximativ den Wert des Integrals mit Hilfe der Trapezsummenformel (mit Unterteilungen in $n = 2, 4, 8$ Teilintervalle).

    (c) Berechnen Sie approximativ den Wert des Integrals mit Hilfe der Simpsonregel.

    (d) Unterteilen Sie das Intervall $[0, 2]$ in 2 gleich grosse Teilintervalle und wenden Sie in jedem Teilintervall die Simpsonregel an, um das gesuchte Integral numerisch zu approximieren.

20. (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: (2 Pkt.)

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big].$$

    (b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: (3 Pkt.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\, dx = 0.$$

21. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade, 2π-periodische Funktion, d.h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Fourierkoeffizienten a_n gleich 0 sind. (2 Pkt.)

22. Man betrachte die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion $f(x) = x^2$, welche 2π-periodisch zu einer Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Skizzieren Sie f und berechnen Sie die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\bar{f}(x) = f(x)$? (3 Pkt.)

23. Man betrachte die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion (4 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } -\pi \leq x < -1 \\ x, & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ 1, & \text{für } 1 \leq x < \pi, \end{cases},$$

welche 2π-periodisch zu einer Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Skizzieren Sie f und berechnen Sie die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$. Bestimmen Sie $\bar{f}(\pi)$ und überprüfen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\bar{f}(x) = f(x)$ gilt.