Übungen "Mathematik B für Elektrotechniker"

SS 2016

Institut für Diskrete Mathematik

28. April 2016

---

21. (Forsetzung von Aufgabe 19) Es ist das Integral $\int_0^2 x \cdot e^{-x^3}\,dx$ numerisch zu berechnen. (2 Pkt.)

    (a) Verwenden Sie den approximativen Wert des Integrals aus Aufgabe 19 (a) (Trapezformel), und schätzen Sie den Fehler ab.

    (b) Berechnen Sie approximativ den Wert des Integrals mit Hilfe der Simpsonregel.

    (c) Unterteilen Sie das Intervall $[0, 2]$ in 2 gleich grosse Teilintervalle und wenden Sie in jedem Teilintervall die Simpsonregel an, um das gesuchte Integral numerisch zu approximieren.

22. (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: (2 Pkt.)

$$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big].$$

    (b) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt: (3 Pkt.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0.$$

23. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade, 2π-periodische Funktion, d.h. es gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Fourierkoeffizienten b_n gleich 0 sind. (2 Pkt.)

24. Man betrachte die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion $f(x) = x^2$, welche 2π-periodisch zu einer Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Skizzieren Sie f und berechnen Sie die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\bar{f}(x) = f(x)$? (3 Pkt.)

25. Man betrachte die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion (3 Pkt.)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } -\pi \le x < -1 \\ -x, & \text{für } -1 \le x < 1 \\ -1, & \text{für } 1 \le x < \pi, \end{cases},$$

welche 2π-periodisch zu einer Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Skizzieren Sie f und berechnen Sie die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$. Bestimmen Sie $\bar{f}(\pi)$ und überprüfen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\bar{f}(x) = f(x)$ gilt.

26. Überprüfen Sie in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$, ob das folgende Integral konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Integralwert: (3 Pkt.)

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^r}\,dx.$$

27. Berechnen Sie folgende Integrale, falls sie konvergieren, bzw. zeigen Sie andernfalls deren Divergenz: (je 2 Pkt)

    (a)

$$\int_0^\infty e^{-2x}\sin(x)\,dx$$

(b)

$$\int_3^\infty \frac{x+2}{(x-2)^2}dx$$

(c)

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{x^5}dx$$

28. Berechnen Sie das folgende Integral: (3 Pkt)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{2e^{-x+1}+e^{x-1}}dx$$