Übungen "Mathematik B für Elektrotechniker"

SS 2016

Institut für Diskrete Mathematik

12. Mai 2016

Hinweis: Es handelt sich hierbei um das endgültige Übungsblatt!

Die Teilaufgabe 27a und Aufgabe 28 werden nur in denjenigen Übungsgruppen noch besprochen, in welchen sich die Besprechung in der letzten Übung zeitlich nicht mehr ausging. Dieses Beispiel ist nicht ankreuzbar; Vorrechnen erfolgt auf freiwilliger Basis.

27. Berechnen Sie folgende Integrale, falls sie konvergieren, bzw. zeigen Sie andernfalls deren Divergenz: (2 Pkt)

    (a)
    $$\int_0^\infty e^{-2x}\sin(x)\,dx$$

28. Berechnen Sie das folgende Integral: (3 Pkt)
    $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e^{-x+1}+e^{x-1}}dx$$

29. Überprüfen Sie mit Hilfe des Cauchy'schen Integralkriteriums, ob die folgende Reihe konvergiert: (3 Pkt.)
    $$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{e^{2n}}.$$
    Hinweis: Hierbei ist insbesondere zu überprüfen, ob der Satz auch angewandt werden darf! Voraussetzungen des Satzes beachten!

30. Überprüfen Sie folgendes Integral auf Konvergenz mit Hilfe des Vergleichskriteriums: (2 Pkt.)
    $$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$$

31. Berechnen Sie folgende Integrale, falls sie konvergieren, bzw. zeigen Sie andernfalls deren Divergenz: (je 2 Pkt.)
    $$(a)\ \int_{1/e}^1 \frac{1}{1+\ln x}dx \qquad (b)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x)^{4/5}}dx$$

32. An welchen Stellen sind folgende Funktionen stetig? (je 2 Pkt.)
    $$(a)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{für } (x,y)=(0,0).\end{cases} \qquad (b)\quad g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3\cos(y^2)}{x^4+y^4}, & \text{für } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{für } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

33. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f(x,y,z)=x^2y^3z-e^{x+y^2}+z$. (2 Pkt.)

34. Man betrachte die Funktion $f(x,y)=x^3\cos(y)+2xy-3$.

    (a) Berechnen Sie die Richtungsableitungen in $(-1,\pi)$ für alle Richtungen $\vec{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie außerdem die Richtungsableitung für den konkreten Vektor $\vec{v}=(-1,2)$. In welcher Richtung liegt der stärkste Anstieg vor? (3 Pkt.)

    (b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1,\pi/2)$. (2 Pkt.)

35. Man betrachte die folgende Funktion: (3 Pkt.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) An welchen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $f(x,y)$ stetig?

(b) Für welche Richtungen $\vec{v} = (a,b)$ existieren die Richtungsableitungen in $(0,0)$? Wenn ja, berechnen Sie $\partial_{\vec{v}} f(0,0)$.

(c) An welchen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $f(x,y)$ total differenzierbar?

36. Berechnen Sie mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel die partiellen Ableitungen von $F(t_1,t_2) = f\big(g_1(t_1,t_2), g_2(t_1,t_2), g_3(t_1,t_2)\big)$ nach t_1 und t_2, wobei (2 Pkt.)

$$f(x,y,z) = xy - z^2,\ g(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} g_1(t_1,t_2) \\ g_2(t_1,t_2) \\ g_3(t_1,t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 t_2^2 \\ \frac{t_1}{t_2} \\ t_1^2 - t_1 t_2 \end{pmatrix}$$

37. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 2xy^2 - \frac{\ln(y)}{x} + 2y$.

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(4,3)$. (2 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene zu $z = f(x,y)$ im Punkt $(2,1)$. (2 Pkt.)