Übungen "Mathematik B für Elektrotechniker"

SS 2016

Institut für Diskrete Mathematik

2. Juni 2016

Hinweis: Es handelt sich hierbei um das endgültige Übungsblatt!

47. Berechnen Sie die Extremwerte sowie deren Typen der Funktion (3 Pkt.)

$$f(x,y) = xy - 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$ durch Parametrisierung.

48. Berechnen Sie die Extremwerte sowie deren Typen der Funktion (3 Pkt.)

$$f(x,y) = x^2y - 2y^2$$

unter der Nebenbedingung $x + y = 3$ mit Hilfe der Lagrange-Methode.

49. Berechnen Sie die Extremwerte sowie deren Typen der Funktion (3 Pkt.)

$$f(x,y,z) = xy - 2z$$

unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x + y - 2z = 1$ mit Hilfe der Lagrange-Methode.

Hinweis: Die erste Nebenbedingung stellt einen Zylinder dar, die zweite Nebenbedingung stellt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ dar. Beide Nebenbedingungen zusammen charakterisieren also die Schnittmenge eines Zylinders mit einer Ebene.

50. Seien folgende Funktionen gegeben: (2 Pkt.)

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1x_2 + x_3 \\ x_1^2x_3 - x_2x_3^3 \end{pmatrix} \quad g(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} t_1 + 2t_2 \\ t_1t_2 - 1 \\ t_2^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel aus den Jacobimatrizen zu f und g die Jacobimatrix zur Funktion $h(t_1,t_2) := f(g(t_1,t_2))$.

51. Berechnen Sie $\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)$ sowie $\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z)$ zu (2 Pkt.)

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz^2 \\ x^2ye^{xy+z} \\ x^3 - y^4z^2 \end{pmatrix}$$

sowie $\triangle f(x,y,z)$ mit $f(x,y,z) = \cos(x^2y + 2z)$.

52. Seien (2 Pkt.)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x_1,x_2,x_3) \mapsto f(x_1,x_2,x_3), \quad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x_1,x_2,x_3) \mapsto \begin{pmatrix} v_1(x_1,x_2,x_3) \\ v_2(x_1,x_2,x_3) \\ v_3(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}$$

zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, daß folgende Gleichung gilt:

$$\mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\,\vec{v}(x_1,x_2,x_3)\big) = 0.$$

53. Berechnen Sie (2 Pkt.)

$$\int_D \cos(x)\sin(y) + z\, d\vec{x} \qquad \text{mit } D = [0, \pi/2] \times [\pi/4, \pi/2] \times [1, 2],\ \vec{x} = (x, y, z).$$

54. Berechnen Sie das Volumen des Körpers im $\mathbb{R}^3$, welcher die Grundfläche $[1, 3] \times [2, 5]$ besitzt und dessen obere Deckfläche gegeben ist durch $f(x, y) = xy^2 + e^{x+y}$. (2 Pkt.)

55. Berechnen Sie das Integral $\int\int_B x^2 y\, dx\, dy$ mit Hilfe von Polarkoordinaten, wobei (3 Pkt.)

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4x, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

56. Man betrachte den Tetraeder T, welcher durch die Ebene $2x - 3y + 2z = 6$ und die Koordinatenebenen im $\mathbb{R}^3$ gegeben ist.

   (a) Berechnen Sie mit Hilfe von Mehrfachintegralen das Volumen von T. (2 Pkt.)

   (b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von T mit Hilfe von Mehrfachintegralen. (*Hinweis:* Verwenden Sie Symmetrien!) (3 Pkt.)