

9. Juni 2016

Hinweis: Die Aufgabe 56 wird nur in denjenigen Übungsgruppen noch besprochen, in welchen sich die Besprechung in der letzten Übung zeitlich nicht mehr ausging. Diese Aufgabe ist nicht ankreuzbar; Vorrechnen erfolgt auf freiwilliger Basis.

56. Man betrachte den Tetraeder T , welcher durch die Ebene $2x - 3y + 2z = 6$ und die Koordinatenebenen im \mathbb{R}^3 gegeben ist.

- (a) Berechnen Sie mit Hilfe von Mehrfachintegralen das Volumen von T . (2 Pkt.)
 (b) Berechnen Sie den Schwerpunkt von T mit Hilfe von Mehrfachintegralen. (*Hinweis:* Verwenden Sie Symmetrien!) (3 Pkt.)

57. Berechnen Sie das Volumen einer Kugel im \mathbb{R}^3 mit Radius $a > 0$, d.h. berechnen Sie das Volumen des Körpers (3 Pkt.)

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

58. Man betrachte den Körper K , welcher gegeben ist durch (3 Pkt.)

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sin(\sqrt{x^2 + y^2}), x^2 + y^2 \leq \pi^2\}.$$

Berechnen Sie dessen Volumen.

59. Berechnen Sie das Dreifachintegral $\int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz$, wobei (3 Pkt.)

$$f(x, y, z) = xz, \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

60. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C f(x, y) ds$, wobei $f(x, y) = (x + \sqrt{3})\sqrt{y+1}$ ist und der Weg \mathcal{C} gegeben ist durch (3 Pkt.)

$$\vec{x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ t^2 - t \end{pmatrix}.$$

61. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauss'schen Satzes das folgende Integral: (3 Pkt.)

$$\int \int_B \operatorname{div} \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} dx dy \quad \text{mit } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

62. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: (2 Pkt.)

$$y' = \frac{y^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad y(0) = 1.$$

63. Man betrachte die Differentialgleichung $y'^2 + (y - 1)^2 = 0$. Welche zugehörigen Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar? (2 Pkt.)

64. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung: (2 Pkt.)

$$y' = \frac{\sin 2x \cos y}{\tan y}$$

65. Lösen Sie die folgende Anfangswertaufgabe: (2 Pkt.)

$$y' = ye^{2x} \quad \text{mit } y(1) = 2$$

66. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu $\frac{y' \sqrt{2+x^3}}{x^2 y^3} = 2$. (2 Pkt.)