

Übung 1

Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x, y) = -4xy + xy^2 - \frac{x^3}{3}$$

definiert ist.

Übung 2

Finden Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen.

- a) $(x^2 + 1)y' + y^2 = 0$;
- b) $y' + x \tan(x)y = 0$, mit $y(0) = \pi/2$;
- c) $y' = \frac{xy}{(x-1)^2}$, mit $y(2) = 1$;
- d) $y' = 3y^{2/3}$, mit $y(0) = 0$.

Übung 3

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$y'(t) = ky(t)(G - y(t))$$

mit $y(0) = y_0 > 0; k, G > 0$.

Das ist die *logistischen Gleichung*. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der verstreichenden Zeit und einem Wachstum, beispielsweise einer idealen Bakterienpopulation. G entspricht dem begrenzten Lebensraum für die Bakterienanzahl. Das Bakterienwachstum $y'(t)$ ist proportional (durch k) zu dem aktuellen Bestand $y(t)$ und der noch vorhandenen Kapazität $G - y(t)$.