Zusatzaufgaben:

7. (3 Punkte) Bestimmen Sie zu folgender Funktion f den Definitionsbereich und diejenigen Werte von x, an welchen die Funktion stetig, linksseitig stetig bzw. rechtsseitig stetig ist. Beheben Sie falls möglich Unstetigkeitsstellen.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}, & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{3}, & \text{für } x = -2 \\ \frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}, & \text{für } -2 < x < 2 \\ 1, & \text{für } x = 2 \\ \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}, & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

8. (3 Punkte) Für welche reellen Werte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{x}_1 = (1,\, \alpha,\, -2)^t, \quad \vec{x}_2 = (2,\, 1,\, \beta)^t, \quad \vec{x}_1 = (1,\, \alpha,\, 1)^t.$$

9. (3 Punkte) Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner gleich 2 mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, daß die Menge $\{x^2 - x, x^2 + x, x^2 + 1\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ ist.

10. (2 Punkte) Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie kurz Ihre Entscheidung!

    (a) Seien $v_1, \ldots, v_k$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und U der von ihnen aufgespannte Untervektorraum. Dann ist $\dim U = k$.

    (b) Seien $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und U_k der von $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannte Untervektorraum sowie U_{k+1} der von $v_1, \ldots, v_{k+1}$ aufgespannte Untervektorraum. Dann ist $\dim U_k = \dim U_{k+1} - 1$.