

2. Minitest

11.12.2012

Pool B

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Gruppennummer: _____

1. Die folgende Funktion sei (für ein passendes $c \in \mathbb{R}$) die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X : (____/3 Pkt.)

$$f_X(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{3} & \text{für } 2 < t \leq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie c derart, daß $f_X(t)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.
 - (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
 - (c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X .
2. Bei einem Würfelspiel mit zwei Würfel entscheidet die Augensumme über den Auszahlungsbetrag: Ist die Augensumme ungerade, so erhält der Spieler einen Euro ausbezahlt; ist die Augensumme gerade und durch 3 teilbar, so erhält der Spieler keine Auszahlung. In allen anderen Fällen erhält er eine Auszahlung von 3 Euro. Sei A der zufällige Auszahlungsbetrag nach einem Spiel. (____/3 Pkt.)
- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von A .
 - (b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von A .
 - (c) Der Spieler muß bei jedem Spiel einen Einsatz von 1 Euro machen. Was ist der erwartete Netto-Gewinn/Verlust?
3. Ein fehleranfälliger Computer stürzt von Zeit zu Zeit ab. Durchschnittlich stürzt er 2 Mal in der Woche ab. Man nehme an, daß die Anzahl der Systemabstürze Poisson-verteilt sei. (____/2 Pkt.)
- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß der Computer in 2 Wochen maximal 4 Mal abstürzt.
 - (b) Nach wie vielen Wochen spätestens ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% ein Systemabsturz zu beobachten?

Σ _____

HINWEIS: Alle Zwischenschritte/Rechnungen sind ausreichend zu begründen!

① $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{3} & \text{für } 2 < t \leq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = \int_0^2 \frac{1}{4}t^2 dt + \int_2^c \frac{1}{3} dt = \frac{1}{12}t^3 \Big|_0^2 + \frac{1}{3}t \Big|_2^c = \frac{8}{12} + \frac{c}{3} - \frac{2}{3} = 1$
 $\Rightarrow \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow \underline{c=3}$

b) $x \leq 0: F_X(x) = 0$

$0 \leq x \leq 2: F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{4}t^2 dt = \frac{1}{12}t^3 \Big|_0^x = \frac{x^3}{12}$

$2 \leq x \leq 3: F_X(x) = \int_0^2 \frac{1}{4}t^2 dt + \int_2^x \frac{1}{3} dt = \frac{1}{12}t^3 \Big|_0^2 + \frac{1}{3}t \Big|_2^x = \frac{8}{12} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} = \frac{x}{3}$

$x > 3: F_X(x) = 1$

c) $E[X] = \int_0^2 \frac{1}{4}t^3 dt + \int_2^3 \frac{1}{3}t dt = \frac{1}{16}t^4 \Big|_0^2 + \frac{1}{6}t^2 \Big|_2^3 = 1 + \frac{9}{6} - \frac{4}{6} = 1 + \frac{5}{6} = \underline{\underline{\frac{11}{6}}}$

② A upgrade $\rightarrow 1 \in$

A grade & 3(A) $\rightarrow 0 \in$ (d.h. $A \in \{6, 12\}$)
 sonst $\rightarrow 30 \in$

a)

i	3	1	0
$P[A=i]$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
	18 12 14 16 41 43 45	21 23 25 52 54 56	22 24 30 33 42 45 51
			15 24 33 33 42 51
			66

b) $E[A] = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + 1 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

$E[A^2] = 9 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$\text{Var } A = \frac{7}{2} - \frac{9}{4} = \frac{14-9}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$

c) $N = \text{Nettogewinn} = A - 1$

$E[N] = E[A] - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

③ a) $\lambda = 2 \cdot 2$

$P[\# \text{ Absence} \leq 4] = \sum_{k=0}^4 e^{-4} \frac{4^k}{k!} = \underline{\underline{0,6288}}$

b) $1 - P[\text{kein Absence in } n \text{ Wochen}] \geq 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-2n} \geq 0,99$

$\Leftrightarrow 0,01 \geq e^{-2n}$

$\Leftrightarrow \ln 0,01 \geq -2n \Rightarrow n \geq -\frac{\ln 0,01}{2} = \frac{-\ln 0,01}{2} = 2,30$

nach spätestens 3 Wochen