3. Minitest 16.01.2013

Pool B

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________

Gruppennummer: _____

1. Es seien zwei Zufallsvariablen X und Y gegeben, wobei X die Werte 0 und 1 annehmen kann und Y die Werte -1, 0 und 1. Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: (/3 Pkt.)

$$\mathbb{P}[X=1,Y=-1]=\frac{1}{6},\mathbb{P}[X=0,Y=0]=\frac{1}{6},\mathbb{P}[X=0,Y=1]=\frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}[X=1]=\frac{1}{4},\mathbb{P}[Y=0]=\frac{1}{4}.$$

   (a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle von (X,Y) inkl. der Randverteilungen.

   (b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

   (c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\varrho(X,Y)$.

2. Es sei folgende Dichtefunktion des Zufallsvektors (X,Y) gegeben: (____/3 Pkt.)

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}15e^{-2x-3y}, & \text{falls } 0<x<y<\infty,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y.

   (b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

3. Man nehme an, daß die durchschnittliche Jahresregenmenge (in Millimeter) in Graz normal-verteilt sei mit Mittelwert $\mu=820mm$ und $\sigma=40$. (/2 Pkt.)

   (a) Wie groß muß k mindestens sein, so daß mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Jahresregenmenge mindestens k ist?

   (b) Bestimmen Sie $c\in\mathbb{R}$, so daß mit 90% Wahrscheinlichkeit, die Regenmenge eines Jahres im Intervall $[\mu-c,\mu+c]$ liegt.

Σ ____

HINWEIS: Alle Zwischenschritte/Rechnungen sind ausreichend zu begründen!

B

1

a)

$Y \backslash X$	0	1	$P[Y=j]$
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{12}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$P[X=i]$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9-6-2}{12} = \frac{1}{12}$

b) Nein, da z.B. $P[X=1, Y=1] = 0$

aber $P[X=1] \cdot P[Y=1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ stoch abh!

c) $\mathbb{E} X = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{4}$

$\operatorname{Var} X = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} = \frac{3}{16}$

$\mathbb{E} Y = -1 \cdot \frac{3}{12} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{3}{12} + \frac{1}{2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\operatorname{Var} Y = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{12-1}{16} = \frac{11}{16}$

$X \cdot Y$	-1	0	1
$P[XY=a]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0

$\mathbb{E}\, X \cdot Y = -1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \operatorname{Cov}(X,Y) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{-8-3}{48} = -\frac{11}{48}$

$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{-11/48}{\sqrt{\frac{3}{16} \cdot \frac{11}{16}}} = \frac{-11/3}{\sqrt{33}} = -\frac{11}{3\sqrt{33}} = -\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = 0{,}6383$

---

2 R = Jahresregenmenge $\qquad R \sim N(820, \sigma = 40)$

a) $P[R \geq k] = 0{,}95$

$\Leftrightarrow 1 - P[R \leq k] = 0{,}95 \Leftrightarrow P[R \leq k] = 0{,}05 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-820}{40}\right) = 0{,}05$

Tabelle $\frac{k-820}{40} = -1{,}65 \Rightarrow k = 820 - 1{,}65 \cdot 40 = 754$

b) $P[\mu - c \leq R \leq \mu + c] = 0{,}9$

$\Leftrightarrow 2\, \Phi\left(\frac{\mu + c - \mu}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9$

$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow$ Tabelle $\frac{c}{\sigma} = 1{,}65 \Rightarrow c = 1{,}65 \cdot 40 = 66$

$\Rightarrow [754, 886]$ 90%-Intervall

② a) $f_X(x) = \int_x^\infty 15\, e^{-2x-3y}\, dy = -5\, e^{-2x-3y}\Big|_x^\infty = 0 - (-5 e^{-5x}) = \underline{\underline{5 e^{-5x}}}$ für $x > 0$

für $x \le 0$: $f_X(x) = 0$

$f_Y(y) = \int_0^y 15\, e^{-2x-3y}\, dx = -\frac{15}{2} e^{-2x-3y}\Big|_0^y = \underline{-\frac{15}{2} e^{-5y} + \frac{15}{2} e^{-3y}}$ für $y > 0$

für $y \le 0$: $f_Y(y) = 0$

b) $f_X(x) \cdot f_Y(y) = 5 e^{-5x} \cdot \left(\frac{15}{2} e^{-3y} - \frac{15}{2} e^{-5y}\right) \neq 15\, e^{-2x-3y}$

$\Rightarrow$ X, Y stoch. abhängig!