

Aufgaben zur Vorlesung “Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stochastische Prozesse”

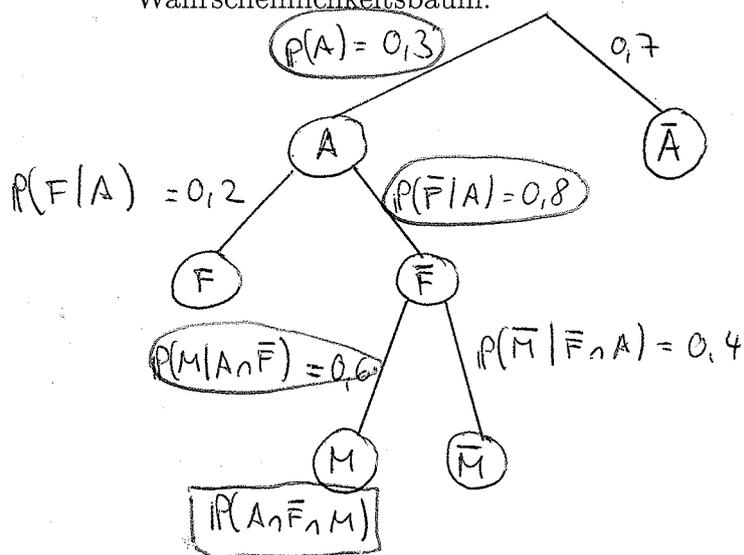
22.10.2009

1. Ein Formel-1-Fahrer verzeichnet im Schnitt bei 30% der Rennen einen Ausfall. Ein Ausfall liegt in 20% der Fällen an einem Fahrfehler. Lag kein Fahrfehler vor, so gab es in 60% der Fälle einen Motorschaden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fahrer bei einem Rennen wegen Motorschaden ausfällt?

Wir definieren folgende Ereignisse:

- A = “Rennfahrer fällt aus dem Rennen aus.”
- F = “Rennfahrer macht einen Fahrfehler.”
- M = “Der Wagen des Rennfahrers hat einen Motorschaden.”

Wahrscheinlichkeitsbaum:



$$\begin{aligned}
 P[M] &= P[A \cap \bar{F} \cap M] && (M \subseteq A, \bar{F}) \\
 &= P[A] \cdot P[\bar{F}|A] \cdot P[M|A \cap \bar{F}] && (\text{Multiplikationsregel}) \\
 &= 0,3 \cdot (1 - 0,2) \cdot 0,6 = 14,4\%.
 \end{aligned}$$

2. In einer Fabrik stellen drei verschiedene Maschinen dasselbe Bauteil her. Aufgrund langjähriger Statistiken weiß man, daß der Ausschußanteil(d.h. der Anteil der defekten Teile) der ersten Maschine bei 10% liegt, der Ausschußanteil der zweiten Maschine bei 15% und bei der dritten Maschine bei 20% liegt. In einer großen Lieferung von 100 Bauteilen wurden 40 Stück von der ersten Maschine, 25 von der zweiten Maschine und 35 Bauteile von der dritten Maschine produziert. Man wählt nun aus der Gesamtlieferung zufällig ein Bauteil aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das gewählte Stück defekt?
3. Es wird ein Medikamentenschnelltest für eine bestimmte Krankheit betrachtet. Aufgrund langjähriger Statistiken weiß man, daß 1% der Bevölkerung an dieser Krankheit erkrankt sind. Aufgrund von Studienergebnissen weiß man, daß der Schnelltest bei einem Erkrankten mit 95% Wahrscheinlichkeit eine Erkrankung signalisiert. Bei einem gesunden Menschen signalisiert der Schnelltest irrtümlich eine Erkrankung mit Wahrscheinlichkeit 1%.
 - (a) Eine zufällige Testperson wird aus der Bevölkerung ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Schnelltest eine Erkrankung signalisiert?
 - (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person tatsächlich erkrankt ist, wenn der Test einen positiven Befund lieferte?
 - (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person irrtümlich als gesund betrachtet wird, wenn der Schnelltest keine Erkrankung signalisierte?
4. In einer Urne befinden sich 4 Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3, und 123. Es wird nun eine Kugel gezogen. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ sei das Ereignis A_i definiert als "Die gezogene Kugel trägt Ziffer i.". Sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 unabhängig?