

**Folien zur Vorlesung**  
**“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”**  
**08.11.2012**

**Eigenschaften von Verteilungsfunktionen:**

1.  $\boxed{\mathbb{P}_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a)}$

$$\begin{aligned}\text{Denn: } \mathbb{P}_X((a, b]) &= \mathbb{P}_X(a < X \leq b) = \mathbb{P}_X(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) \\ &= \mathbb{P}_X(\{X \leq b\}) - \mathbb{P}_X(\{X \leq a\}) = F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

2.  $\boxed{\mathbb{P}_X(X > a) = 1 - F_X(a)}$

$$\text{Denn: } 1 = \mathbb{P}_X(X \leq a) + \mathbb{P}_X(X > a) = F_X(a) + \mathbb{P}_X(X > a)$$

3.  $\boxed{0 \leq F_X(x) \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.}$

4.  $F_X$  ist **monoton wachsend**, d.h.  $\boxed{\text{aus } x_1 \leq x_2 \text{ folgt } F_X(x_1) \leq F_X(x_2)}$

$$\begin{aligned}\text{Denn: } \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_1\} &\subseteq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_2\} \text{ und daher} \\ F_X(x_1) &= \mathbb{P}_X(X \leq x_1) \leq \mathbb{P}_X(X \leq x_2) = F_X(x_2).\end{aligned}$$

5.  $F_X$  ist **rechtsseitig stetig**, d.h.  $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0+} F_X(x) = F_X(x_0)}$

$$\text{Denn: Setze } x_n = x_0 + \frac{1}{n}, \text{ d.h.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_X\left(X \leq x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_0 + \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_0\right\}\right) = F_X(x_0).\end{aligned}$$

6.  $\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0-} F_X(x) = \mathbb{P}_X(X < x_0)}$

$$\text{Denn: Setze } x_n = x_0 - \frac{1}{n}, \text{ d.h.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_X\left(X \leq x_0 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_0 - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x_0\right\}\right) = \mathbb{P}_X(X < x_0).\end{aligned}$$

7. Insbesondere gilt:

$$F_X(x_0) - \lim_{x \rightarrow x_0-} F_X(x) = \mathbb{P}_X(X \leq x_0) - \mathbb{P}_X(X < x_0) = \mathbb{P}_X(X = x_0)$$

8.  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0}$  Denn:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \searrow \emptyset \text{ falls } x \rightarrow -\infty,$$

$$\text{also } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

9.  $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1}$  Denn:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \nearrow \Omega \text{ falls } x \rightarrow \infty,$$

$$\text{also } \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

## Beispiele und Aufgaben:

1. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsvariable  $X$  sei die Augenzahl beider Würfel.

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i_1, i_2) \mid i_1, i_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \\ \mathbb{P}(\{(i_1, i_2)\}) &= \frac{1}{36} \text{ für jedes Paar } (i_1, i_2) \in \Omega, \\ X &: \Omega \rightarrow \{2, 3, \dots, 12\} : (i_1, i_2) \rightarrow i_1 + i_2\end{aligned}$$

| $i$                         | 2              | 3              | 4              | 5               | 6               | 7               | 8               | 9               | 10              | 11              | 12                  |
|-----------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| $p_i = \mathbb{P}_X[X = i]$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$  | $\frac{5}{36}$  | $\frac{6}{36}$  | $\frac{5}{36}$  | $\frac{4}{36}$  | $\frac{3}{36}$  | $\frac{2}{36}$  | $\frac{1}{36}$      |
| $F_X(i)$                    | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{21}{36}$ | $\frac{26}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{33}{36}$ | $\frac{35}{36}$ | $\frac{36}{36} = 1$ |

Also:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 2 \\ \sum_{i=2}^k p_i, & \text{für } k \leq x < k+1 \text{ (mit } k \in \{2, 3, \dots, 11\}) \\ 1, & \text{für } x \geq 12 \end{cases}$$

$$P_X[6 \leq X \leq 8] = P_X[5 < X \leq 8] = F_X(8) - F_X(5) = \frac{26}{36} - \frac{10}{36} = \frac{16}{36},$$

oder

$$P_X[6 \leq X \leq 8] = p_6 + p_7 + p_8 = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{16}{36}.$$

2. In einem Ölhafen dauert das Beladen von Tankern mindestens 5 Stunden. Darüber hinaus sinkt die Wahrscheinlichkeit für längere Beladezeiten exponentiell ab. Die Beladezeit  $T$  ist eine Zufallsgröße mit folgender Dichte:

$$f_T(t) = \begin{cases} e^{5-t} & \text{für } t \geq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, daß  $f_T$  eine Dichtefunktion ist.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von  $T$ .
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Beladezeit zwischen 6 und 8 Stunden dauert?
- Wie groß sind der Erwartungswert und die Varianz von  $T$ ?