Folien zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse"
15.11.2012

Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung:

Sei X eine Binomialverteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$, d.h.

$$\mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{für } k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Dann ist der Erwartungwert von X:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{(k-1)+1} (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}
\end{aligned}$$

Nun machen wir eine Index-Verschiebung und setzen $k = l+1$ (bzw. $l = k-1$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= n \cdot p \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= n \cdot p \cdot \big(p + (1-p)\big)^{n-1} = n \cdot p.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der binomische Lehrsatz angewandt.

Nun berechnen wir die Varianz von X. Dazu benötigen wir $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n(n-1)!}{(k-1)!\big((n-1)-(k-1)\big)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \cdot \binom{n-1}{k-1} p^{(k-1)+1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}
\end{aligned}$$

Wieder machen wir eine Index-Verschiebung und setzen $k = l + 1$ (bzw. $l = k - 1$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \cdot n \cdot \binom{n-1}{l} p^{l+1} (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \cdot \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= n \cdot p \cdot \Bigg[\underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} l \cdot \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{(n-1)-l}}_{=(n-1)\cdot p} + \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^{l} (1-p)^{(n-1)-l}}_{=\left(p+(1-p)\right)^{n-1}=1} \Bigg] \\
&= n \cdot p \cdot \big((n-1) \cdot p + 1 \big) = n \cdot (n-1) \cdot p^2 + n \cdot p.
\end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichung wendeten wir die Formel für $\mathbb{E}X$ für die Parameter $n-1$ und p an (erste Teilsumme) sowie den binomischen Lehrsatz (zweite Teilsumme). Somit ergibt sich die Varianz von X wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \\
&= n \cdot (n-1) \cdot p^2 + n \cdot p - n^2 p^2 \\
&= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p).
\end{aligned}$$

<u>Beispiel:</u>

Ein Roulettespieler setzt 100 Spiele auf Rot. Sei X die Anzahl der Spiele, die er gewinnt. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X, sowie die Standardabweichung.

Erwartungswert und Varianz der hypergeometrischen Verteilung:

Sei X eine hypergeometrische Verteilung mit den Parametern $N, M, n \in \mathbb{N}$ mit $M \leq N$, d.h.

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } k \in \big\{0, 1, \ldots, \min\{M, n\}\big\}.$$

Zunächst wollen wir den Erwartungwert von X berechnen. Dazu benötigen wir folgende Gleichung für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \geq b$:

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} = \frac{a(a-1)!}{b(b-1)!\big((a-1)-(b-1)\big)!} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung berechnen wir nun $\mathbb{E}X$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k \cdot \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\frac{M}{k}\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N} \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Wieder machen wir eine Indexverschiebung mittels $l = k-1$ (bzw. $k = l+1$). Dabei beachte man, daß $\min\{n, M\} - 1 = \min\{n-1, M-1\}$ gilt. Somit:

$$\mathbb{E}X = \frac{nM}{N} \underbrace{\sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \underbrace{\frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=\mathbb{P}[Y=l]}}_{=1} = \frac{nM}{N},$$

wobei Y eine hypergeometrisch-verteilte Zufallsvariable ist mit dem folgenden Modell: aus $N-1$ Kugeln (davon $M-1$ rote Kugeln und $(N-1)-(M-1)$ blaue Kugeln) ziehe man $n-1$ Kugeln ohne Zurücklegen; Y beschreibt die Anzahl der roten Kugeln, die gezogen wurden.

Zur Berechnung der Varianz von X benötigen wir $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\min\{M,n\}} k^2 \cdot \mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k^2 \cdot \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k^2 \cdot \frac{\frac{M}{k}\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N} \sum_{k=1}^{\min\{M,n\}} k \cdot \frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Wiederum machen wir eine Indexverschiebung durch $l = k-1$ und wir erhalten analog zur Berechnung von $\mathbb{E}X$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{nM}{N} \sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} (l+1) \cdot \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nM}{N}\Bigg[\underbrace{\sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} l \cdot \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=\frac{(n-1)(M-1)}{N-1}} + \underbrace{\sum_{l=0}^{\min\{M-1,n-1\}} \frac{\binom{M-1}{l}\binom{(N-1)-(M-1)}{(n-1)-l}}{\binom{N-1}{n-1}}}_{=1}\Bigg] \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right].
\end{aligned}$$

Die Varianz ist nun gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{nM}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1\right] - \frac{n^2M^2}{N^2} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)(M-1)}{N-1} + 1 - \frac{nM}{N}\right] \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{(n-1)(M-1)N + (N-1)N - nM(N-1)}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{nMN - MN - nN + N + N^2 - N - nMN + nM}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{N^2 + nM - nN - MN}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{(N-1)N} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \\
&= \frac{nM}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}.
\end{aligned}$$

<u>Beispiel:</u>

In einer Lostrommel befinden sich 1000 Lose, wobei 75 Gewinnlose darunter sind. Es werden 10 Lose gezogen. Man berechne die erwartete Anzahl X von Gewinnen, sowie die Varianz und Standardabweichung von X.