Folien zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
15.11.2012

Eigenschaften von Erwartung und Varianz:

1. $\boxed{X \geq 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) \geq 0}$

2. $\boxed{\text{Falls } X \text{ konstant gleich } c \in \mathbb{R} \text{ ist, so gilt } \mathbb{E}(X) = c.}$

   Denn: X ist also diskret und $\mathbb{P}(X = c) = 1$, d.h. $\mathbb{E}(X) = c \cdot 1 = c$.

3. $\boxed{\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b \text{ für } a, b \in \mathbb{R}}$

   Denn: Falls X diskret:

   $$\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{x_i \in W} (ax_i + b)p_i = a \sum_{x_i \in W} x_i p + b \sum_{x_i \in W} p_i = a\mathbb{E}(X) + b.$$

   Falls X stetig:

   $$\mathbb{E}(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f_X(x)\,dx = a \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = a\mathbb{E}(X)+b.$$

4. $\boxed{\mathbb{E}\big(g(X) + h(X)\big) = \mathbb{E}\big(g(X)\big) + \mathbb{E}\big(h(X)\big) \text{ für } g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

   Denn: Falls X diskret:

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(g(X) + h(X)\big) &= \sum_{x_i \in W} \big(g(x) + h(x)\big)p_i \\ &= \sum_{x_i \in W} g(x)p_i + \sum_{x_i \in W} h(x)p_i = \mathbb{E}\big(g(X)\big) + \mathbb{E}\big(h(X)\big). \end{aligned}$$

   Falls X stetig:

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}\big(g(X) + h(X)\big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(g(x) + h(x)\big) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\,dx = \mathbb{E}\big(g(X)\big) + \mathbb{E}\big(h(X)\big). \end{aligned}$$

5. $\boxed{Var(X) \geq 0}$

6. $\boxed{Var(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ konstant (d.h. } \mathbb{P}(X = c) = 1 \text{ für ein } c \in \mathbb{R})}$

   Denn: Wenn X konstant (und damit diskret) ist, ist $\mathbb{E}(X) = \mu = c$ und $Var(X) = (c - \mu) \cdot 1 = 0$. Ist umgekehrt $Var(X) = 0$, so ist $\sum_{x_i \in W} (x_i - \mu)^2 p_i = 0$, bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x)\,dx = 0$, d.h. $x_i = \mu$ für jedes $x_i \in W$, bzw. $x = \mu$.

7. $\boxed{\underline{\text{Verschiebungssatz}}\text{: } Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2}$

Denn: $(\mu = \mathbb{E}(X))$

$$V(X) = \mathbb{E}\big((X-\mu)^2\big) = \mathbb{E}\big(X^2 - 2\mu X + \mu^2\big) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.$$

8. $\boxed{Var(aX+b) = a^2 Var(X) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}}$

Denn:

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= \mathbb{E}\big((aX+b)^2\big) - \big(\mathbb{E}(aX+b)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - \big(a\mathbb{E}(X) + b\big)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) - a^2\mathbb{E}(X)^2 \\ &= a^2 Var(X). \end{aligned}$$

9. $\boxed{Var(-X) = Var(X)}$