Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
29.11.2012

Zur Normalverteilung:

Es gilt für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1.$$

Beweis: Man betrachte:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} dy \right).$$

Man mache die folgenden Substitutionen:

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad v = \frac{y - \mu}{\sigma}.$$

Daraus folgt:

$$du = \frac{dx}{\sigma}, dv = \frac{dy}{\sigma} \quad \text{und daraus:} \quad dx = \sigma du, dy = \sigma dv.$$

Die Integralgrenzen bleiben jeweils bei $-\infty$ und ∞ . Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du dv. \end{aligned}$$

Nun machen wir eine Substitution mit Hilfe von Polarkoordinaten:

$$u = r \cos \phi, v = r \sin \phi \quad \text{mit} \quad r > 0, \phi \in [0, 2\pi).$$

Die Jacobi-Determinante ist r . Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \left[-e^{-\frac{1}{2}r^2} \right]_0^{\infty} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\phi = 1. \end{aligned}$$

Da $I \geq 0$, muss also gelten: $I = 1$.

□