Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
06.12.2012

Schätzung von Parametern der Normalverteilung:

Der zufällige Meßfehler X eines Meßgerätes werde als normal-verteilt angenommen mit unbekanntem Mittelwert μ und unbekannter Varianz σ^2 . Es werden n unabhängige Probemessungen durchgeführt und jeweils die Abweichung vom tatsächlichen Wert (z.B. mittels Gegenprüfung durch ein geeichtes Gerät) betrachtet.

Beobachtete Werte: $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Der Mittelwert μ kann geschätzt werden durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Die Varianz σ^2 kann geschätzt werden durch

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Beispiel: 10 Messungen ergaben folgende Messfehler (Abweichungen vom tatsächlichen Wert):

$$-0.7, -0.5, -0.3, -0.2, 0, 0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.8.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Messung um maximal 0.5 vom tatsächlichen Wert abweicht?

Schätzungen für μ und σ^2 :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{10} (-0.7 + (-0.5) + \dots + 0.3 + 0.8) = -0.02, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{9} ((-0.7 - (-0.02))^2 + (-0.5 - (-0.02))^2 + \dots + (0.8 - (-0.02))^2) = 0.203. \end{aligned}$$

D.h. σ wird geschätzt durch $\sqrt{0.203}$. Der zufällige Messfehler X wird also durch eine Normalverteilung mit Parameter $\mu = -0.02$ und $\sigma = \sqrt{0.203}$ modelliert. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[-0.5 \leq X \leq 0.5] &= \Phi\left(\frac{0.5 - (-0.02)}{\sqrt{0.203}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5 - (-0.02)}{\sqrt{0.203}}\right) \\ &= \Phi(1.15) - \Phi(-1.07) \\ &= \Phi(1.15) - 1 + \Phi(1.07) \\ &= 0.8749 - 1 + 0.8577 = 0.7326 \end{aligned}$$