Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
13.12.2012

Die Gamma-Verteilung

Diese Verteilung dient häufig zur Modellierung der Lebensdauer von langlebigen Industriegüstern. Die **Dichte** einer gamma-verteilten Zufallsvariable X mit **Gestaltsparameter** $a > 0$ und **Skalierungsparameter** $\lambda > 0$ ist gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\Gamma(a)$ die Gamma-Funktion (siehe Mathematik B) beschreibt, welche gegeben ist durch

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

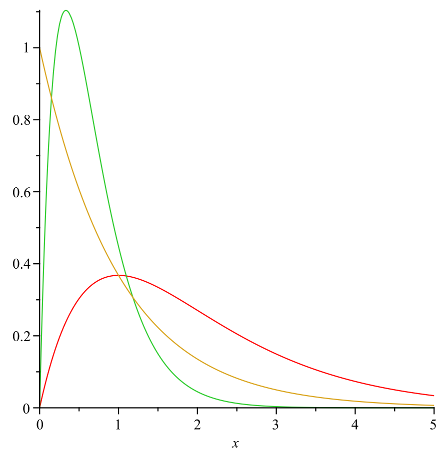
Wir zeigen zunächst, daß $f_X(x)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist: offensichtlich ist $f_X(x) \geq 0$, da $\Gamma(a) \geq 0$, und außerdem gilt mit Hilfe der Substitution $y = \lambda x$ (und dadurch $dy = \lambda\, dx$):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f_X(x)\, dx &= \int_0^\infty \frac{\lambda^a x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\Gamma(a)} \int_0^\infty (\lambda x)^{a-1} e^{-\lambda x} dx \\ &\overset{y=\lambda x}{=} \frac{\lambda}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = 1. \end{aligned}$$

Aus dem Kapitel F zur Mathematik B wissen wir folgende Werte/Rechenregeln der Gamma-Funktion:

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi},\ \Gamma(1) = 1,\ \Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ \Gamma(n+1) = n! \text{ für } n \in \mathbb{N}, a > 0.$$

Einige Dichte-Funktionen: $\alpha = 2$ und $\lambda = 1$ (rot), $\alpha = 2$ und $\lambda = 3$ (grün), $\alpha = 1$ und $\lambda = 1$ (gelb).



Der **Erwartungswert** einer gamma-verteilten Zufallsvariablen X ergibt sich wieder mit Hilfe der der Substitution $y = \lambda x$ (und dadurch $dy = \lambda\, dx$):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_0^\infty x f_X(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^a x^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} dx \\
&\overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty y^a e^{-\lambda x} \frac{dy}{\lambda} = \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma(a)}{\lambda\Gamma(a)} = \frac{a}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Das zweite Moment ergibt sich mit derselben Substitution nach einer partiellen Integration wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f_X(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \underbrace{x^{a+1}}_{=:f} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{=:g'} dx \\
&= \underbrace{\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \underbrace{x^{a+1}}_{=f} \underbrace{\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}}_{=:g} \Big|_0^\infty}_{=0-0=0} - \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \underbrace{(a+1)x^a}_{=f'} \underbrace{\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}}_{=:g} dx \\
&= \frac{a+1}{\lambda\Gamma(a)} \int_0^\infty (\lambda x)^a e^{-\lambda x} dx \\
&\overset{y=\lambda x}{=} \frac{a+1}{\lambda\Gamma(a)} \int_0^\infty y^a e^{-y} \frac{dy}{\lambda} \\
&= \frac{a+1}{\lambda^2\Gamma(a)} \Gamma(a+1) = \frac{a+1}{\lambda^2\Gamma(a)} a\Gamma(a) = \frac{a^2+a}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Varianz als

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = \frac{a^2+a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Weitere Bemerkungen:

- Eine integralfreie Darstellung der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x \frac{\lambda^a t^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda t} dt$$

  existiert nur für $a \in \mathbb{N}$.

- Im Spezialfall $a = 1$ wird die Dichtefunktion wegen $\Gamma(1) = 1$ zu

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  D.h. die Gamma-Verteilung mit $a = 1$ ist genau die **Exponentialverteilung** mit Parameter $\lambda > 0$.

- Sei X gamma-verteilt mit den Parametern $a > 0$ und $\lambda > 0$. Betrachte nun die Zufallsvariable

$$Z = \lambda X.$$

  Dann erhalten wir für die Verteilungsfunktion von Z:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}[Z \leq z] = \mathbb{P}[\lambda X \leq z] = \mathbb{P}[X \leq z/\lambda] = F_X(x/\lambda).$$

  Daraus ergibt sich die Dichtefunktion von Z für $z > 0$ als

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\partial}{\partial z} F_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z} F_X\left(\frac{z}{\lambda}\right) = f_X\left(\frac{z}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{\lambda^a \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\lambda \frac{z}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{z^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-z}. \end{aligned}$$

  D.h. $Z = \lambda X$ ist wiederum eine Gamma-Verteilung mit den Parametern a und $\lambda = 1$.

Grenzwertsatz von De Moivre-Laplace:

Sei X binomialverteilt mit den Parametern n und p, d.h.

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Dann kann man für ausreichend großes $n \in \mathbb{N}$ folgende Approximationen machen: (Faustregel: $n \min\{p, 1-p\} > 5$)

1. Für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

   $$\mathbb{P}[X = k] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}} = \varphi(k),$$

   wobei φ die Dichte einer Normalverteilung mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ ist.

2. Für $k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ mit $l \leq k$:

   $$\mathbb{P}[l \leq X \leq k] \approx \Phi\Big(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) - \Phi\Big(\frac{l - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\Big),$$

   wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Die Terme $\pm\frac{1}{2}$ werden Stetigkeitskorrektur genannt (siehe Tafel!).

Beispiel: Ein spielsüchtiger Spieler setzt bei 2000 Roulette-Spielen stets auf Rot. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er zwischen 980 und 1020 mal gewinnt? Man berechne die Wahrscheinlichkeit approximativ über die Normalverteilung!

Kapitel 8: Zufallsvektoren

Statt einem Merkmal werden häufig **mehrere** Merkmale gleichzeitig betrachtet, z.B. Körpergröße und Körpergewicht, Helligkeit und Lebensdauer von Glühbirnen, etc. Wir beschränken uns auf zwei Merkmale, wobei untenstehendes verallgemeinert werden kann auf n Merkmale.

Grundlegende Begriffe:

Definition: Ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) ist eine Abbildung

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2.$$

Beispiel: Ein Würfel wird 4 Mal geworfen. D.h.

$$\Omega = \big\{(i_1, i_2, i_3, i_4) \mid i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\}.$$

X sei die Anzahl der geworfenen Sechsen; Y sei die Augensumme der 4 Würfe.

Definition: Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ eines Zufallsvektors (X, Y) ist gegeben durch

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y].$$

Definition: (X, Y) ist ein diskreter Zufallsvektor, falls X und Y nur endlich viele oder abzählbar viele verschiedene Werte annehmen können. Falls $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ der Wertebereich von X ist und $W_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ der Wertebereich von Y, so ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion gegeben durch

$$\mathbb{P}_{X,Y}[X = x_i, Y = y_j] \qquad x_i \in W_X, y_j \in W_Y.$$

Die Verteilungsfunktion von (X, Y) ist gegeben durch

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\substack{x_i \in W_X: \\ x_i \leq x}} \sum_{\substack{y_j \in W_Y: \\ y_j \leq y}} \mathbb{P}_{X,Y}[X = x_i, Y = y_j] \qquad x \in W_X, y \in W_Y.$$

Definition: (X, Y) ist ein stetiger Zufallsvektor, falls eine Funktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq}$ existiert mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx = 1$$

und

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1.$$

$f_{X,Y}(x, y)$ wird dann die gemeinsame Dichte von (X, Y) genannt.

Eigenschaften der gemeinsamen Verteilungsfunktion:

1. $F_{X,Y}(x,y)$ ist in jeder Komponente monoton wachsend und rechtsseitig stetig: denn, falls $x_1 \le x_2$ und $y_1 \le y_2$:

   $$F_{X,Y}(x_1,y_1) = \mathbb{P}[X \le x_1, Y \le y_1] \le \mathbb{P}[X \le x_2, Y \le y_2] = F_{X,Y}(x_2,y_2).$$

   Die rechtsseitige Stetigkeit folgt analog wie im eindimensionalen Fall.

2. $$\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$$

   Denn:

   $$0 \le \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}[X \le x, Y \le y] \le \lim_{x\to-\infty} \mathbb{P}[X \le x] = 0.$$

3. Analog:
   $$\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$$

4. $$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = 1$$

   Denn:

   $$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty, y\to\infty} \mathbb{P}[X \le x, Y \le y] = \mathbb{P}[X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}] = 1.$$

5. $$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_Y(y)$$

   Denn:

   $$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}[X \le x, Y \le y] = \mathbb{P}[X \in \mathbb{R}, Y \le y] = \mathbb{P}[Y \le y] = F_Y(y).$$

6. Analog:
   $$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_X(x)$$

7. Falls $f_{X,Y}$ stetig ist, so gilt:

   $$\frac{\partial}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y) = f_{X,Y}(x,y).$$

Frage: Wie bekommt man aus der gemeinsamen Verteilung die Verteilungen von X und Y?

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann sind die Randverteilungen von X und Y wie folgt gegeben:

1. Falls (X, Y) diskret ist:
   - Randverteilung von X:
   $$\mathbb{P}[X = x_i] = \sum_{y \in W_Y} \mathbb{P}[X = x_i, Y = y] \qquad x_i \in W_X.$$
   - Randverteilung von Y:
   $$\mathbb{P}[Y = y_i] = \sum_{x \in W_X} \mathbb{P}[X = x, Y = y_i] \qquad y_i \in W_Y.$$
2. Falls (X, Y) stetig ist:
   - Randdichte von X (d.h. die Dichte von X):
   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \qquad x \in \mathbb{R}$$
   - Randdichte von Y (d.h. die Dichte von Y):
   $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx \qquad y \in \mathbb{R}$$

Definition: Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig, falls für alle $x_i \in W_X$ und alle $y_j \in W_Y$ gilt:

$$\mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] = \mathbb{P}[X = x_i] \cdot \mathbb{P}[Y = y_j].$$

Definition: Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir:

$$\mathbb{E}g(X,Y) = \begin{cases} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} g(x,y) \cdot \mathbb{P}[X = x, Y = y], & \text{falls } (X,Y) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx, & \text{falls } (X,Y) \text{ stetig} \end{cases}$$

$\mathbb{E}g(X,Y)$ ist definiert, falls die Summen bzw Integrale konvergieren!

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann ist die Kovarianz von (X, Y) definiert als

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\big].$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\big] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

Definition: Sei (X, Y) ein Zufallsvektor. Dann ist der Korrelationskoeffizient von (X, Y) definiert als

$$\varrho(X,Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}.$$

Der Korrelationskoeffizient ist ein Maß, das den linearen Zusammenhang zwischen X und Y widerspiegelt.

Eigenschaften von Erwartung und Varianz von Zufallsvektoren:

Im Folgenden sei (X, Y) ein Zufallsvektor, wobei $\mathbb{E}(X^2), \mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Rechenregeln:

1. $\boxed{\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)}$

   Denn: Falls X und Y diskret sind mit Wertebereichen W_X bzw. W_Y:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + bY) &= \sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} (ax_i + by_j)\mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \\ &= \sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} ax_i \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] + \sum_{x_i \in W_X} \sum_{y_j \in W_Y} by_j \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \\ &= \sum_{x_i \in W_X} ax_i \mathbb{P}[X = x_i] + \sum_{y_j \in W_Y} by_j \mathbb{P}[Y = y_j] \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

   Falls X und Y stetig sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + bY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ax f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} by f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ax f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} by f_Y(y)\, dy \\ &= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

2. $\boxed{Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y)}$

   Denn:

$$\begin{aligned} & Var(aX+bY) \\ = \ & \mathbb{E}\big((aX+bY)^2\big) - \big(\mathbb{E}((aX+bY))\big)^2 \\ = \ & \mathbb{E}\big(a^2X^2 + 2abXY + b^2Y^2\big) - \big(a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)\big)^2 \\ = \ & a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(XY) + b^2\mathbb{E}(Y^2) - a^2\mathbb{E}(X)^2 + 2ab\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + b^2\mathbb{E}(Y)^2 \\ = \ & a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y) \end{aligned}$$

3. $\boxed{\big|\varrho(X,Y)\big| \leq 1}$

   Denn: Dies kann mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung bewiesen werden:

$$\begin{aligned} & \Big(\sum x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum x_i^2\Big) \cdot \Big(\sum y_i^2\Big) \text{ bzw.} \\ & \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dy\Big)^2 \leq \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\,dx\Big) \cdot \Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^2\,dx\Big) \end{aligned}$$

4. $\boxed{\varrho(aX+b, cY+d) = \varrho(X,Y), \varrho(X,X) = 1, \varrho(X,-X) = -1}$

Sind X und Y zusätzlich unabhänig, so gilt:

1. $\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$

2. $\boxed{Cov(X,Y) = 0}$

3. $\boxed{\varrho(X,Y) = 0}$

4. $\boxed{Var(aX+bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y)}$

Aufgaben zu Zufallsvektoren:

1. Die diskreten Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte 0, 1 und 2 an. Es sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbb{P}[X=0,Y=1]=\frac{1}{16},\ \mathbb{P}[X=1,Y=0]=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}[X=1,Y=2]=\frac{1}{16},$$
$$\mathbb{P}[X=2,Y=0]=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}[X=2,Y=1]=\frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}[X=1]=\mathbb{P}[Y=0]=\frac{5}{16},\ \mathbb{P}[X=2]=\frac{7}{16}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X und Y, sowie Erwartung und Varianz von X.

   (b) Sind X und Y unabhängig?

   (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen $Z=X+Y$.

   (d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von (X,Y).

2. Man betrachte folgende Funktion, wobei $c\in\mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\begin{cases} c\cdot x\cdot y^2, & \text{falls } 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie c so, daß $f(x,y)$ eine Dichtefunktion einer Zufallsvektors (X,Y) ist.

   (b) Berechnen Sie die Randdichten von X und Y, sowie die Erwartung und Varianz von X. Sind X und Y unabhängig?

   (c) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von (X,Y).