Folie zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse”
07.01.2013

Zu zweidimensionalen Zufallsvektoren:

Lemma: Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Beweis: Wir beweisen nur den Fall, daß X und Y diskrete Zufallsvariablen sind (der stetige Fall läuft analog). Seien W_X bzw. W_Y die Wertebereiche von X bzw. Y . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} x \cdot y \cdot \mathbb{P}[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{X, Y \text{ unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} x \cdot y \cdot \mathbb{P}[X = x] \cdot \mathbb{P}[Y = y] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \mathbb{P}[X = x] \cdot \sum_{y \in W_Y} y \cdot \mathbb{P}[Y = y] \\ &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

□

Satz: (Faltungsformeln)

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen und sei $Z := X + Y$.

1. Falls X und Y diskrete Zufallsvariablen sind und nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen: für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[X + Y = k] = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}[X = i, Y = k-i] \stackrel{X, Y \text{ unabh.}}{=} \sum_{i=0}^k \mathbb{P}[X = i] \mathbb{P}[Y = k-i].$$

2. Falls X und Y stetige Zufallsvariablen mit Dichtefunktionen f_X und f_Y sind, so besitzt Z die folgende Dichtefunktion:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y) dy \stackrel{X, Y \text{ unabh.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx \stackrel{X, Y \text{ unabh.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich die moment-erzeugende Funktion von Z aus den zu X bzw. zu Y gehörigen momenterzeugenden Funktionen G_X bzw. G_Y :

$$G_Z(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s).$$

Zu Grenzwertsätzen:

Definition: Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert stochastisch** gegen einen Wert $c \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{X_n}[|X_n - c| > \varepsilon] = 0.$$

Satz: (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Seien X_i unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Erwartung $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und derselben Varianz $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Dann konvergiert

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

stochastisch gegen μ , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{X_n}[|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Beweis: Siehe Skriptum Seite 87.

Satz: (Zentraler Grenzwertsatz)

Seien X_i unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartung $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und Varianz $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$. Sei

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Dann strebt die Verteilung der standardisierten Summe

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

gegen die Standardnormalverteilung. D.h. für die Verteilungsfunktionen F_{Z_n} von Z_n gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = \Phi(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Falls X_i unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartung $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und Varianz $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ sind, so besitzt das n -te arithmetische Mittel

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

die Kennwerte

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}(\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n}n\mu = \mu,$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}(X_1/n) + \dots + \text{Var}(X_n/n) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(X_1) + \dots + \frac{1}{n^2}\text{Var}(X_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt, daß die Verteilung von $\bar{X}_n$ somit asymptotisch gegen eine Normalverteilung $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ strebt.

Zu POISSON-Prozessen:

1. Die Differenz $N_t - N_s$, wobei $0 \leq s \leq t$, beschreibt die Anzahl der Ereignisse, welche im Intervall $(s, t]$ eintreten.
2. Ein homogener Poisson-Prozeß hat **stationäre Zuwächse**, d.h. die Differenzen

$$N_{s+\tau} - N_s \quad \text{und} \quad N_{t+\tau} - N_t, \quad \text{wobei } s, t, \tau \geq 0,$$

besitzen dieselbe Verteilung! Die Verteilung der beiden Differenzen hängt nur von λ und von τ ab, jedoch nicht von s und t . Insbesondere besitzt $N_{s+\tau} - N_s$ dieselbe Verteilung wie $N_\tau - N_0 = N_\tau$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem sehr kleinen Intervall $(s, s + h]$ kein Ereignis eintritt, ist fast gleich 1:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}[N_{s+h} - N_s = 0] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{-\lambda h} = 1.$$

4. λ ist die erwartete Anzahl von Ereignissen in $[0, 1]$, denn:

$$\mathbb{P}[N_1 = k] = \frac{(\lambda \cdot 1)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot 1} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

d.h. N_1 ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = \mathbb{E}[N_1]$.

Aufgabe:

An einer Straßenkreuzung kommt es im Schnitt zweimal pro Tag zu einem Verkehrsunfall. Die Anzahl der Straßenunfälle werde durch einen homogenen Poisson-Prozeß modelliert. Dazu bezeichne X_t , $t \geq 0$, die Anzahl der Unfälle im Intervall $[0, t]$, wobei $t = 1$ einem Tag entspricht.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von 3 Tagen zwischen 5 und 7 Unfälle passieren?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß am ersten Tag genau ein Unfall passiert, am zweiten und fünften Tag jeweils genau 3 oder 4 Unfälle und am vierten Tag genau 2 Unfälle passieren?