Folie zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stoch. Prozesse"
10.01.2013

Zu POISSON-Prozessen:

1. Die Differenz $N_t - N_s$, wobei $0 \leq s \leq t$, beschreibt die Anzahl der Ereignisse, welche im Intervall $(s,t]$ eintreten.

2. Ein homogener Poisson-Prozeß hat **stationäre Zuwächse**, d.h. die Differenzen

$$N_{s+\tau} - N_s \quad \text{und} \quad N_{t+\tau} - N_t, \text{ wobei } s,t,\tau \geq 0,$$

   besitzen dieselbe Verteilung! Die Verteilung der beiden Differenzen hängt nur von λ und von τ ab, jedoch nicht von s und t. Insbesondere besitzt $N_{s+\tau} - N_s$ dieselbe Verteilung wie $N_\tau - N_0 = N_\tau$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem sehr kleinen Intervall $(s, s+h]$ kein Ereignis eintritt, ist fast gleich 1:

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}[N_{s+h} - N_s = 0] = \lim_{h\to 0} \frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{-\lambda h} = 1.$$

4. λ ist die erwartete Anzahl von Ereignissen in $[0,1]$, denn:

$$\mathbb{P}[N_1 = k] = \frac{(\lambda \cdot 1)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot 1} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

   d.h. N_1 ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = \mathbb{E}[N_1]$.

Aufgabe:

An einer Straßenkreuzung kommt es im Schnitt zweimal pro Tag zu einem Verkehrsunfall. Die Anzahl der Straßenunfälle werde durch einen homogenen Poisson-Prozeß modelliert. Dazu bezeichne X_t, $t \geq 0$, die Anzahl der Unfälle im Intervall $[0,t]$, wobei $t = 1$ einem Tag entspricht.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von 3 Tagen zwischen 5 und 7 Unfälle passieren?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß am ersten Tag genau ein Unfall passiert, am zweiten und fünften Tag jeweils genau 3 oder 4 Unfälle und am vierten Tag genau 2 Unfälle passieren?

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt der 5. Unfall frühestens am dritten Tag auf?

4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert am ersten Beobachtungstag bis mittags der erste Unfall <u>und</u> der dritte Unfall frühestens am zweiten Beobachtungstag?

Lemma:

Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Zählprozeß mit exponential-verteilten i.i.d. Zwischenankunftszeiten mit Parameter λ.
Dann ist N_t Poisson-verteilt mit Parameter λt.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t = n] &= \mathbb{P}[N_t \geq n] - \mathbb{P}[N_t \geq n+1] \\
&= \mathbb{P}[T_n \leq t] - \mathbb{P}[T_{n+1} \leq t] \\
&= \int_0^t f_{T_n}(x)\,dx - \int_0^t f_{T_{n+1}}(x)\,dx \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda x}}{n!} dx
\end{aligned}$$

Partielle Integration des ersten Integrals mit

$$f = e^{-\lambda x}, g' = x^{n-1} \Longrightarrow f' = -\lambda e^{-\lambda x}, g = \frac{1}{n} x^n$$

führt zu:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t = n] &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{1}{n} x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^t + \int_0^t \frac{1}{n} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx\right) - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n e^{-\lambda x}}{n!} dx \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{1}{n} t^n e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe des Lemmas kann man aufgrund der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse (Wartezeiten) folgenden Satz zeigen:

Satz: (Charakterisierung von homogenen Poisson-Prozessen)

Sei $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Zählprozeß mit exponential-verteilten i.i.d. Zwischenankzunftszeiten mit Parameter λ.
Dann ist $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozeß.